



4^o Math. P. 125 ^R_—

Math. P. in 4^o

125^K

Florijn

V E R H A N D E L I N G

OVER HET

SOMMEREN EN INTERPOLEREN

VAN

ARITHMETISCHE SERIËN,

DOOR

J A C O B F L O R I J N,

*Lid van het Koninklijk Nederlandsch Instituut van
Wetenschappen, Letterkunde en Schoone
Kunsten, enz. enz.*

Uitgegeven door hetzelfde Instituut.

TE AMSTERDAM,

Bij P. DEN HENGST en ZOON.

MDCCCXVI.

V E R H A N D E L I N G

OVER HET

SOMMEREN EN INTERPOLAREN

VAN

ARITHMETISCHE SERIËN.

DOOR

J A C O B T I O R N.



Lid van het Koninklijk Instituut van Wetenschappen, Letteren en Schone Kunsten.

Uitgegeven door het Koninklijk Instituut.

TE AMSTERDAM,
B. P. VAN HENGEST en ZONN.
MDCCCXL.

RAPPORT aan de EERSTE KLASSE
van het NEDERLANDSCHE INSTI-
TUUT van Wetenschappen, Let-
terkunde en Schoone Kunsten,
over eene Verhandeling van den
Heer FLORIJN, ten tijtel voerende:
Verhandeling over het Somme-
ren en Interpoleren van Arith-
metische Seriën.

De Seriën of reeksen maken een zeer gewigtig deel uit van de Stelkunde; en vele Schrijvers hebben over dezelve gehandeld: het bepalen van den algemeenen term en van de som derzelve hebben vooral de Wiskunstenaars bezig gehouden.

*Het getal der genen, die over de interpolatie of tusfchen invoe-
ging van termen gehandeld hebben, is minder groot; niet tegen-
staande het uitstekend nut van die interpolatie in de Sterrekunde
en ook in verscheide vakken der Natuurkunde.*

*Eene korte inhoud te geven van eene verhandeling als deze,
welke geheel uit algebraïsche formules en numerische voorbeelden
bestaat, is niet wel mogelijk, maar zoo de volmaaktheid van eene
verhandeling van dien aart afhangt, Theoretisch, 1°. van de
eenvoudigheid der grondbeginselen: 2°. van de duidelijkheid en
kortheid der bewijzen: 3°. van de eenvoudigheid en elegantie der
formules: 4°. van derzelve volledigheid: en boven dien Practisch;
van de gemakelijkheid, waar mede die formules op alle voorko-
mende gevallen kunnen toegepast worden, mitsgaders van de keuze
van voorbeelden en derzelve aantal en verscheidenheid; maken de
Rapporteurs geen zwaarigheid de Klasse te verzekeren, dat er, huns
oordeels, en na dat zij verscheide Schrijvers opzettelijk hebben ge-
raadpleegd, geene verhandeling over dit onderwerp bestaat, welke,
noch op verreken, ten opzigte van alle die vereischten, in vergelij-
king kan komen met deze: en dat, nu nog, eene verhandeling
gelijk deze, voor de mathematische wetenschappen eene wezenlijke
aanwinst is: en in 't bijzonder in onze taal, waarin men met
goede stukken over soortgeijike onderwerpen minder rijkelijk voor-
zien is, ten hoogste welkom moet zijn.*

*De ondergeteekende kunnen derhalve geen ogenblik in twyfel
staan*

staan de Klasse aanteraden, deze uitmuntende Verhandeling met hare goedkeuring te bevestigen en tot het uitgeven van dezelve te besluiten.

Eenigzints moeilijker zal het zijn te beslissen, op welke wijze die Verhandeling zoude behoren te worden uitgegeven, afzonderlijk of in de werken van de Klasse? Hier zijn de belangen van de wetenschappen en van het publiek ter eener, en die van de Klasse aan de andere zijde, in een tweestrijd.

Het belang der wetenschappen en dat van 't publiek schijnt te vorderen, dat die Verhandeling voor allen gemakkelijk verkrijgbaar gemaakt worde; vooral om dat men nergens voor de applicatie der formules en daar door voor de beoefening eene zoo schoone keuze en zoo groote verscheidenheid van belangrijke voorbeelden aantreft: dit belang pleit derhalve voor eene afzonderlijke uitgave van deze schoone Verhandeling.

De eer der Klasse aan den anderen kant zoude vorderen, dat dit stuk in derzelver Verhandelingen werd gedrukt. Maar dusdanige Verhandelingen komen minder in handen van het algemeen: zij zijn meer voor Geleerden als zoodanigen geschikt, dan voor beoefenaren van alle Klasse. Ook zoude dan misschien, en wel om dezelfde rede, het getal der voorbeelden moeten verminderd worden; waardoor echter de Verhandeling veel van haar nut en van hare waarde zoude verliezen.

Wij zouden om alle deze redenen van gedachten zijn, dat om beide zaken, en de eer der Klasse en het nut van het publiek te vereenigen, die Verhandeling afzonderlijk door de Klasse zoude behoren uitgegeven te worden.

Wij onderwerpen dit ons gevoelen aan het oordeel der Klasse.

Amsterdam 14 April 1814.

(was geteekend)

J. H. VAN SWINDEN,

C. E K A M A.

De Eerste Klasse heeft zich met het bovenstaand Rapport vereenigd en dien overeenkomstig besloten.

G. V R O L I K,

Secretaris.

VERHANDELING

OVER HET SOMMEREN EN INTERPOLEREN

VAN

ARITHMETISCHE SERIËN;

UIT DE EENVOUDIGSTE BEGINSELEN AFGELEID, EN MET

TOEPASSELIJKE VOORBEELDEN OPGEHELDERD:

DOOR

JACOB FLORIJN.

BEPALING.

Arithmetische Seriës noemt men, in het algemeen, elke Rij van Getallen, welker onmiddelijk op elkander volgende termen, gedurig van elkander afgetrokken, eene nieuwe *Seriës* maken, waarvan de gedurige verschillen, op dezelfde wijze genomen, al wederom eene nieuwe *Seriës* geven, en zoo voorts, tot dat men eindelijk eene *Seriës* verkrijgt van gelijke getallen, of welker verschillen *nul* zijn.

Als, bij voorbeeld:

A	1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c.
B	4, 10, 20, 35, 56, 84, &c.
C	6, 10, 15, 21, 28, &c.
D	4, 5, 6, 7, &c.
E	1, 1, 1, &c.

A

In

In dit voorbeeld beteekent A de *Arithmetische Seriës*; B is de *Seriës der Eerste Verschillen*; C der *Tweede*; D der *Derde*; en E der *Vierde Verschillen*, welke laatste allen aan elkander gelijk zijn: zoo dat A eene *Arithmetische Seriës* is, welker vierde verschillen gelijk zijn, en waarvan dus de vijfde verschillen *nul* worden.

EERSTE ALGEMEEN VOORSTEL.

Gegeven zijnde de eerste termen van eene *Arithmetische Seriës*, en van de *Seriën* der eerste, tweede, derde verschillen enz. tot de laatste, die allen gelijk zijn; om hieruit den *Algemeenen Term* en de *Som* der Termen te bepalen.

OPLOSSING.

	1, 2, 3, 4, 5, 6 termen.					
1 ^o . Laat de <i>Arithm. Seriës</i> zijn	A,	$\overset{1}{A}$,	$\overset{2}{A}$,	$\overset{3}{A}$,	$\overset{4}{A}$,	$\overset{5}{A}$, &c.
De Seriës der 1 ^{ste} verschillen	B,	$\overset{1}{B}$,	$\overset{2}{B}$,	$\overset{3}{B}$,	$\overset{4}{B}$,	&c.
— — — 2 ^{de} — — —	C,	$\overset{1}{C}$,	$\overset{2}{C}$,	$\overset{3}{C}$,	$\overset{4}{C}$,	&c.
— — — 3 ^{de} — — —	D,	$\overset{1}{D}$,	$\overset{2}{D}$,	$\overset{3}{D}$,	$\overset{4}{D}$,	&c.
— — — 4 ^{de} — — —	E,	$\overset{1}{E}$,	$\overset{2}{E}$,	$\overset{3}{E}$,	$\overset{4}{E}$,	&c.
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

zoo dat A, B, C, D, E &c. achtereenvolgende de eerste termen dezer *Seriën* verbeelden; $\overset{1}{A}$, $\overset{1}{B}$, $\overset{1}{C}$, $\overset{1}{D}$, $\overset{1}{E}$ &c. de tweede; $\overset{2}{A}$, $\overset{2}{B}$, $\overset{2}{C}$, $\overset{2}{D}$ &c. de derde, en zoo vervolgens; dan heeft men

$\overset{1}{A} = A + B$	$\overset{2}{B} = B + C$	$\overset{3}{C} = C + D$	enz.
$\overset{2}{A} = \overset{1}{A} + \overset{1}{B}$	$\overset{3}{B} = \overset{2}{B} + \overset{2}{C}$	$\overset{4}{C} = \overset{3}{C} + \overset{3}{D}$	
$\overset{3}{A} = \overset{2}{A} + \overset{2}{B}$	$\overset{4}{B} = \overset{3}{B} + \overset{3}{C}$	$\overset{5}{C} = \overset{4}{C} + \overset{4}{D}$	
$\overset{4}{A} = \overset{3}{A} + \overset{3}{B}$	$\overset{5}{B} = \overset{4}{B} + \overset{4}{C}$	$\overset{6}{C} = \overset{5}{C} + \overset{5}{D}$	
&c. &c.	&c. &c.	&c. &c.	

En

En hieruit:

$$A = A$$

$$A^I = A + B$$

$$A^{II} = A + 2B + C$$

$$A^{III} = A + 3B + 3C + D$$

$$A^{IV} = A + 4B + 6C + 4D + E$$

&c.

&c.

&c.

&c.

Waaruit de wet van voortgang van zelve klaarblijkelijk is: namelijk,

$$A = A$$

$$A^I = A + B$$

$$A^{II} = A + 2B + C$$

$$A^{III} = A + 3B + 3C + D$$

$$A^{IV} = A + 4B + 6C + 4D + E$$

$$A^V = A + 5B + 10C + 10D + 5E + F$$

$$A^{VI} = A + 6B + 15C + 20D + 15E + 6F + G$$

&c.

&c.

zijnde bijgevolg de *Coëfficiënten* van A, B, C, D enz. niets anders dan de gewone en bekende *Coëfficiënten*, of *Unciae*, der Magten van een *Binomium*: weshalve in het algemeen de n^{de} term der *Arithmetische Seriës* A, A^I, A^{II}, A^{III}, enz. zal uitgedrukt worden, door

$$T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}D + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4}E \&c.$$

welke *Formule* bijgevolg den Algemeenen Term (dien wij in het vervolg altijd T zullen noemen) van alle *Arithmetische Seriën* te kennen geeft.

2^o. Om de Som te bepalen, die wij S zullen noemen, zoo is

$$A = A$$

$$A + A^I = 2A + B$$

$$A + A^I + A^{II} = 3A + 3B + C$$

$$A + A^I + A^{II} + A^{III} = 4A + 6B + 4C + D$$

$$A + A^I + A^{II} + A^{III} + A^{IV} = 5A + 10B + 10C + 5D + E$$

$$A + A^I + A^{II} + A^{III} + A^{IV} + A^V = 6A + 15B + 20C + 15D + 6E + F$$

&c.

&c.

A 2

zijn-

zijnde bijgevolg de *Coëfficiënten* als voren, en daarom de Som van n termen der *Seriës* $A, A^I, A^{II}, A^{III} \&c.$ of

$$S = nA + \frac{n(n-1)}{2}B + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}C + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}D + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}E \&c.$$

Dat te vinden was.

I. A A N M E R K I N G.

Volgens de *Bepaling* moet men, in elke *Arithmetische Seriës*, eindelijk op gelijke verschillen komen, zoo dat noodzakelijk of B , of C , of $D \&c.$ en dan mede alle de volgende o worden; weshalve aldaar de beide gevondene *Formulen* voor T en S afbreken, en deze bijgevolg altijd maar een bepaald getal van termen hebben, of eindig zijn. Hieruit heeft men dan deze

G E V O L G E N.

1. Als van de *Arithmetische Seriës* de termen zelven alle aan elkander gelijk zijn, of de eerste verschillen o , heeft men

$$B = C = D = E = \&c. = o:$$

$$\text{derhalve } T = A \text{ en } S = nA.$$

2. Als de eerste verschillen gelijk, of de tweede en volgende alle o zijn, heeft men $C = D = \&c. = o$:

$$\text{derhalve } T = A + (n-1)B$$

$$\text{en } S = nA + \frac{n(n-1)}{2}B,$$

hetwelk het geval is voor alle gewoone *Arithmetische Progresfien*.

3. Als de tweede verschillen gelijk zijn, is $D = E = \&c. = o$:

$$\text{derhalve } T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C$$

$$\text{en } S = nA + \frac{n(n-1)}{2}B + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}C,$$

hetwelk het geval is voor alle *Polygonaal-getallen*.

4. Als

4. Als de derde verschillen gelijk zijn, is $E \&c. = 0$:

$$\text{derhalve } T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}D$$

$$\text{en } S = nA + \frac{n(n-1)}{2}B + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}C + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}D,$$

hetwelk het geval is voor alle *Pyramidaal-getallen*.

En zoo vervolgens.

1. VOORBEELD.

Gegeven zijnde, 1, 5, 9, 13, 17, 21, &c.

4, 4, 4, 4, 4, &c.

zoo is $A=1$ en $B=4$: derhalve $T=1+4(n-1)=4n-3$

$$\text{en } S = n + \frac{4n(n-1)}{2} = \frac{4n^2-2n}{2} = n(2n-1)$$

Laat $n=6$ zijn; dan is de 6^{de} Term, of $T=21$

En de Som der 6 eerste Termen, of $S=6 \cdot 11=66$

2. VOORBEELD.

Gegeven 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.

2, 3, 4, 5, 6, &c.

1, 1, 1, 1, &c.

Zoo is $A=1$, $B=2$ en $C=1$:

$$\text{derhalve } T = 1 + 2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{en } S = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = \frac{n^3+3n^2+2n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$$

Laat $n=6$ zijn; dan is de 6^{de} Term, of $T=3 \cdot 7=21$

En de Som der 6 eerste Termen, of $S=7 \cdot 8=56$.

3. V O O R B E E L D.

Gegeven 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c.
 3, 6, 10, 15, 21, &c.
 3, 4, 5, 6, &c.
 1, 1, 1, &c.

Zoo is $A = 1$, $B = 3$, $C = 3$ en $D = 1$:

$$\text{derhalve } T = 1 + 3(n-1) + \frac{3(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{of } T = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{En } S = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\text{of } S = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Laat $n = 6$ zijn; dan is de 6^{de} Term, of $T = 7 \cdot 8 = 56$

En de Som der 6 eerste Termen, of $S = 7 \cdot 2 \cdot 9 = 126$

Laat $n = 100$ zijn; dan is de 100^{ste} Term,

$$\text{of } T = \frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{2 \cdot 3} = 10100 \cdot 17 = 171700$$

$$\text{en } S = \frac{100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{171700 \cdot 103}{4}$$

$$\text{of } S = 42925 \cdot 103 = 4421275.$$

4. V O O R B E E L D.

In de voorgaande voorbeelden hebben wij altijd $A = 1$ genomen, of ondersteld, dat de *Arithmetische Seriës* van de eenheid begint; doch de *Formulen* zijn algemeen: als gegeven zijnde 8, 16, 31, 57, 99, 163, &c.

8, 15, 26, 42, 64, &c.

7, 11, 16, 22, &c.

4, 5, 6, &c.

1, 1, &c.

Hier

Hier is $A = B = 8$, $C = 7$, $D = 4$ en $E = 1$, zijnde $F \text{ \&c.} = 0$.

$$\text{Derhalve } T = 8 + 8(n-1) + \frac{7 \cdot (n-1)(n-2)}{2} + \frac{2 \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\text{of } T = \frac{n^4 + 6n^3 + 23n^2 + 66n + 96}{24}$$

$$\text{En } S = 8n + 4n(n-1) + \frac{7n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\text{of } S = \frac{n^5 + 10n^4 + 55n^3 + 230n^2 + 664n}{120}$$

$$\text{Laat } n=6 \text{ zijn; dan is de 6de Term, of } T = \frac{2n^3 + 23n + 82}{4} = \frac{652}{4} = 163$$

$$\text{ende som van de 6 Termen, of } S = \frac{n^4 + 10n^3 + 55n^2 + 230n + 664}{20}$$

$$\text{dat is, } S = \frac{7480}{20} = 374.$$

Door den Algemeenen Term T kan men de gegevene *Seriës* niet alleen naar achteren verder verlengen, met na elkander $n=7, 8, 9, 10$ enz. te nemen; maar, zoo dezelve niet met 1 begint, (als in dit voorbeeld) kan men ook de voorafgaande, of weggelatene termen bepalen, door te stellen $n=0, -1, -2, -3$ enz.: want

$$\text{stellende } n=0, \text{ dan wordt } T = \frac{96}{24} = 4$$

$$\text{--- } n=-1, \text{ --- } T = \frac{1 - 6 + 23 - 66 + 96}{24} = \frac{48}{24} = 2$$

$$\text{--- } n=-2, \text{ --- } T = \frac{16 - 48 + 92 - 132 + 96}{24} = \frac{24}{24} = 1.$$

Zoo dat de getallen 4, 2, 1 mede tot dezelfde *Arithmetische Seriës* behooren, gelijk blijkt.

1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, &c.

1, 2, 4, 8, 15, 26, &c.

1, 2, 4, 7, 11, &c.

1, 2, 3, 4, &c.

1, 1, 1, &c.

Men

Men kan verder stellen $n = -3, -4, -5, -6$ enz. en daardoor zal men verkrijgen . . $T = 1, 3, 9, 22$ enz. zoodat de *Seriës* ter wederzijde onbepaaldelijk kan verlengd worden, in dezer voege.

&c. 22, 9, 3, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 31 &c.

&c. -13, -6, -2, 0, 1, 2, 4, 8, 15 &c.

&c. 7, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 7 &c.

&c. -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 &c.

&c. 1, 1, 1, 1, 1, 1 &c.

Als men nu ook van deze *Seriës* den Algemeenen Term en de Som wilde bepalen, zoude men $A=22, B=-13, C=7, D=-3$ en $E=1$ moeten nemen: doch men kan dezelve gemakkelijker uit de voorgaanden vinden, door $n-7$ in de plaats van n te stellen, omdat nu de *Seriës* 7 termen vroeger begint; waardoor men vinden zal

$$T = \frac{(n-7)^4 + 6(n-7)^3 + 23(n-7)^2 + 66(n-7) + 96}{24}$$

$$\text{of } T = \frac{n^4 - 22n^3 + 191n^2 - 746n + 1104}{24}$$

$$\text{En } S = \frac{(n-7)^5 + 10(n-7)^4 + 55(n-7)^3 + 230(n-7)^2 + 664(n-7) + 5040}{120}$$

$$\text{of } S = \frac{n^5 - 25n^4 + 265n^3 - 1415n^2 + 3814n - 5040}{120}$$

Doch deze laatste *Formule* zal de ware Som der *Seriës*, van 22 af beginnende, nog niet uitdrukken; omdat men in de voorgaande van van den term 8 af begonnen is: weshalve 'er alle de termen van 22 tot 8, bedragende te zamen 42 of $\frac{5040}{120}$, zullen moeten worden bijgeteld; zoodat men voor de Som van n termen, beginnende nu met 22, als den eersten term, zal hebben

$$S = \frac{n^5 - 25n^4 + 265n^3 - 1415n^2 + 3814n}{120}$$

5. V O O R B E E L D.

Uit het voorgaande blijkt, dat de Regels algemeen zijn, offchoon sommige der grootheden A, B, C enz. negatief worden; waarvan ter nadere opheldering kan strekken het volgende voorbeeld.

Gegeven zijnde de *Arithmetische Series*,

$$4, 5, 4, 2, 0, -1, 0, 4, 12, 25, 44, 70 \text{ \&c.}$$

$$1, -1, -2, -2, -1, 1, 4, 8, 13, 19, 26 \text{ \&c.}$$

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ \&c.}$$

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \text{ \&c.}$$

dan is $A = 4, B = 1, C = -2, D = 1$ en de verdere grootheden E, F, G &c. = 0: derhalve

$$T = 4 + n - 1 - \frac{2(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{of } T = \frac{n^3 - 12n^2 + 35n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n-5)(n-7)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{En } S = 4n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\text{of } S = \frac{n^4 - 14n^3 + 47n^2 + 62n}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Laat $n=5$ zijn; dan is de 5^{de} Term, of $T=0$,

en de Som der 5 eerste Termen, of $S = \frac{360}{24} = 15$

Laat $n=100$ zijn; dan is de 100^{ste} Term,

$$\text{of } T = \frac{100 \cdot 95 \cdot 93}{2 \cdot 3} = 50 \cdot 95 \cdot 31 = 147250$$

en de Som der 100 eerste Termen

$$\text{of } S = \frac{100000000 - 14 \cdot 1000000 + 47 \cdot 1000 + 62 \cdot 100}{24}$$

$$\text{dat is } S = \frac{86476200}{24} = 3603175$$

Zoo men deze *Seriës* met de derde 4, als eerste Term, wil doen aanvangen, moet men $n+7$ in de plaats van n schrijven; dan wordt

$$T = \frac{n(n+2)(n+7)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{En } S = \frac{(n+7)^4 - 14(n+7)^3 + 47(n+7)^2 + 62(n+7) - 14}{24}$$

$$\text{of } S = \frac{n^4 + 14n^3 + 47n^2 + 34n}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Men ziet hieruit, dat van deze *Seriës* alleen 3 Termen kunnen o worden, door namelijk te nemen $n = 0$

$$n = -2$$

$$\text{en } n = -7$$

6. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde $p^2, (p+q)^2, (p+2q)^2, (p+3q)^2, \&c.$

of $p^2, p^2 + 2pq + q^2, p^2 + 4pq + 4q^2, p^2 + 6pq + 9q^2, \&c.$

$2pq + q^2, 2pq + 3q^2, 2pq + 5q^2, \&c.$

$2q^2, 2q^2, \&c.$

zoo is $A = p^2, B = 2pq + q^2$ en $C = 2q^2$: hier door vindt men

$$T = p^2 + (n-1)(2pq + q^2) + (n-1)(n-2)q^2 = p^2 + (n-1)2pq + (n-1)^2q^2$$

of $T = (p + (n-1)q)^2$

$$\text{En } S = np^2 + \frac{n(n-1)(2pq + q^2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)q^2}{3}$$

$$\text{of } S = np^2 + n(n-1)pq + \frac{n(n-1)(2n-1)q^2}{6}$$

Laat $p = 1$ en $q = 1$ zijn, dan wordt de *Seriës*

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \&c.$

en bijgevolg $T = n^2$

$$\text{en } S = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = n^2 + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$$

$$\text{of } S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}$$

7. VOORBEELD.

Gegeven $pq, (p+r)(q+r), (p+2r)(q+2r), (p+3r)(q+3r) \&c,$
 of $pq, pq+(p+q)r+r^2, pq+(2p+2q)r+4r^2, pq+(3p+3q)r+9r^2, \&c.$
 $(p+q)r+r^2, (p+q)r+3r^2, (p+q)r+5r^2, \&c.$

$2r^2, \quad 2r^2, \&c.$

Derhalve $A = pq, B = (p+q)r+r^2$, en $C = 2r^2$: bijgevolg

$$T = pq + (n-1)(p+q)r + (n-1)r^2 + (n-1)(n-2)r^2$$

of $T = pq + (n-1)(p+q)r + (n-1)^2r^2 = (p+(n-1)r)(q+(n-1)r)$

$$\text{En } S = npq + \frac{n(n-1)}{2}(p+q)r + \frac{n(n-1)r^2}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)r^2}{3}$$

$$\text{of } S = npq + \frac{n(n-1)}{2}(p+q)r + \frac{n(n-1)(2n-1)r^2}{2 \cdot 3}$$

Laat $p=1, q=2$ en $r=1$ zijn; dan is de voorgestelde Seriës

$$1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, 5 \times 6, 6 \times 7, \&c.$$

$$\text{of } 2, 6, 12, 20, 30, 42, \&c.$$

zijnde de natuurlijk op elkander volgende *Pronikgetallen*.

Bijgevolg $T = n(n+1)$

$$\text{en } S = 2n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$$

$$\text{of } S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Laat $n=6$ zijn; dan is de 6^{de} Term, of $T = 6 \cdot 7 = 42$

en de Som der 6 eerste Termen, of $S = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3} = 112.$

Laat $n=100$ zijn; dan is de 100^{ste} Term, of $T = 100 \cdot 101 = 10100$

en de Som der 100 Termen, of $S = \frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{3} = 10100 \cdot 34 = 343400.$

B I J V O E G S E L.

Als men, in dit voorbeeld, stelt $r = -1$, zoo dat de Series is
 $pq, (p-1)(q-1), (p-2)(q-2), (p-3)(q-3) \&c.$

$$\text{verkrijgt men } S = npq - \frac{n(n-1)}{2}(p+q)r + \frac{n(n-1)(2n-1)r^2}{2 \cdot 3}$$

$$\text{dat is } S = npq - \frac{n(n-1)(p+q)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{of } S = n \left[\left(p - \frac{n-1}{2} \right) \left(q - \frac{n-1}{2} \right) + \frac{(n-1)(n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 3} \right]$$

zijnde eene algemeene *Formule*, waardoor men het getal Kogels
 kan berekenen op een langwerpigen stapel, van n lagen, hebbende
 p Kogels in de breedte en q in de lengte van de onderste laag.

Bij voorbeeld: $p = 10$, $q = 20$ en $n = 7$ zijnde, zoo is

$$S = 7(7 \cdot 17 + 4) = 7 \cdot 123 = 861: \text{ want nu liggen 'er}$$

in de onderste laag $10 \times 20 = 200$ Kogels.

— — tweede —	$9 \times 19 = 171$	— —
— — derde —	$8 \times 18 = 144$	— —
— — vierde —	$7 \times 17 = 119$	— —
— — vijfde —	$6 \times 16 = 96$	— —
— — zesde —	$5 \times 15 = 75$	— —
— — bovenste —	$4 \times 14 = 56$	— —

In het geheel 861 Kogels.

Voor een vollen Stapel, die zoo vele lagen heeft, als 'er Kogels
 in de breedte liggen, moet men stellen $n = p$;

$$\text{dan wordt } S = n \left[\frac{(n+1)}{2} \frac{(2q-n+1)}{2} + \frac{(n-1)(n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 3} \right]$$

$$\text{of } S = n(n+1) \left[\frac{2q-n+1}{2 \cdot 2} + \frac{n-1}{2 \cdot 2 \cdot 3} \right]$$

$$\text{dat is, } S = n(n+1) \left(\frac{3q-n+1}{6} \right)$$

Bij

Bij voorbeeld: hoe vele Kogels liggen 'er op een' Stapel, als 'er in de onderste laag zijn 12 in de breedte en 32 in de lengte?

$$\text{Antwoord} = 12 \cdot 13 \cdot \frac{85}{6} = 13 \cdot 170 = 2210 \text{ Kogels.}$$

Als de Stapel, in plaats van langwerpig te zijn, vierkant is, heeft men ook $q = n$; en dan is

$$S = n(n+1) \left(\frac{2n+1}{6} \right), \text{ als in het 6de Voorbeeld.}$$

Bij voorbeeld: om te vinden, hoe vele Kogels 'er liggen in een vierkanten Stapel van 20 in ieder zijde?

$$\text{Antwoord: } S = 20 \cdot 21 \cdot \frac{41}{6} = 70 \cdot 41 = 2870 \text{ Kogels.}$$

II. A A N M E R K I N G.

Uit de voorgaande voorbeelden kan men klaar genoeg bemerken, hoe algemeen deze handelwijze is, om den algemeenen Term en de Som te bepalen van allerlei *Arithmetische Seriën*, mits dezelve maar op gelijke verschillen te brengen zijn. Van dit soort van *Seriën* zijn 'er eenige bijzondere, welker gebruik meermalen voorkomt; die, met de eenheid aanvangende, de eenvoudigste *Formulen* opleveren, en waarop de geheele Leer van de zoogenoemde *Figuurlijke Getallen* gegrond is. Deze zullen wij nu afzonderlijk beschouwen.

I. G E V A L.

Voor de Natuurlijke Getallen en derzelve Magten.

I. V O O R B E E L D.

Om de Som te vinden van de *Seriës*.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \&c. \dots n.$$

Hier is $A=1$ en $B=1$: dus $T=1+n-1=n$

$$\text{en } S = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

B 3

2. V O O R-

2. V O O R B E E L D.

Om de Som te vinden van de *Seriës*,

$$\begin{array}{l} 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \&c. \dots n^2. \\ \text{of } 1, 4, 9, 16, 25, 36, \&c. \dots nn \\ 3, 5, 7, 9, 11, \&c. \\ 2, 2, 2, 2, \&c. \end{array}$$

Nu is $A = 1$, $B = 3$, $C = 2$ en $T = n^2$:

$$\text{bijgevolg } S = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{n(3n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

$$\text{of } S = n \times \frac{2n^2 + 3n + 1}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}$$

3. V O O R B E E L D.

Om de Som te vinden van de *Seriës*,

$$\begin{array}{l} 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, \&c. \dots n^3 \\ \text{of } 1, 8, 27, 64, 125, 216, \&c. \dots n^3 \\ 7, 19, 37, 61, 91, \&c. \\ 12, 18, 24, 30, \&c. \\ 6, 6, 6, \&c. \end{array}$$

Hier is $A = 1$, $B = 7$, $C = 12$, $D = 6$ en $T = n^3$:

$$\text{bijgevolg } S = n + \frac{7n(n-1)}{2} + 2n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

$$\text{of } S = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{2 \cdot 2}$$

Waaruit volgt, dat de Som der Teerlingen van de Natuurlijke Getallen altijd een Vierkant is, en wel juist het Vierkant van de Som der Getallen zeive.

$$\begin{array}{l} \text{Bij voorbeeld: } 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 9 \cdot 49 = 441 = 21^2 \\ \text{en } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 3 \cdot 7 = 21. \end{array}$$

Op

Op dezelfde wijze voortgaande zal men de Som kunnen bepalen der vierde Magten, der vijfde Magten enz. en daardoor de volgende algemeene *Formulen* vinden.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$$1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + \dots + n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$

$$1^7 + 2^7 + 3^7 + 4^7 + \dots + n^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

$$1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + \dots + n^8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30}$$

$$1^9 + 2^9 + 3^9 + 4^9 + \dots + n^9 = \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \frac{3n^8}{4} - \frac{7n^6}{10} + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{20}$$

$$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} + \dots + n^{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66}$$

&c.

&c.

B I J V O E G S E L.

Als het getal der termen n oneindig groot is, verdwijnt n ten opzichte van n^2 , zoo mede n^2 in betrekking tot n^3 , en n^3 ten opzichte van n^4 enz. in welk geval men derhalve hebben zal

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n^2}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4}{4}$$

&c.

&c.

En algemeen

$$1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \dots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$$

I I. G E V A L.

Voor de Polygonaal-getallen.

I. V O O R B E E L D.

Voor de *Trigonaal*- of *Driehoekige*-getallen.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c.

2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

1, 1, 1, 1, 1, &c.

Derhalve $A=1$, $B=2$ en $C=1$:

$$\text{daarom } T = 1 + 2(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{en } S = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$$

2. V O O R -

2. V O O R B E E L D.

Voor de *Tetragonaal*, *Quadraat*- of Vierhoekige-getallen.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c.

3, 5, 7, 9, 11, 13, &c.

2, 2, 2, 2, 2, &c.

Derhalve $A=1$, $B=3$ en $C=2$:

$$\text{dus } T = 1 + 3(n-1) + (n-1)(n-2) = n^2$$

$$\text{en } S = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}$$

3. V O O R B E E L D.

Voor de *Pentagonaal*- of Vijfhoekige-getallen.

1, 5, 12, 22, 35, 51, &c.

4, 7, 10, 13, 16, &c.

3, 3, 3, 3, &c.

Derhalve $A=1$, $B=4$ en $C=3$:

$$\text{dus } T = 1 + 4(n-1) + \frac{3(n-1)(n-2)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\text{en } S = n + 2n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^3 + n^2}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

4. V O O R B E E L D.

Voor de *Hexagonaal*- of Zeshoekige-getallen.

1, 6, 15, 28, 45, 66, &c.

5, 9, 13, 17, 21, &c.

4, 4, 4, 4, &c.

Derhalve $A=1$, $B=5$ en $C=4$:

$$\text{dus } T = 1 + 5(n-1) + 2(n-1)(n-2) = 2n^2 - n = n(2n-1)$$

$$\text{en } S = n + \frac{5n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{2 \cdot 3}$$

C

In

In 't algemeen.

Laat p de naam van den *Polygoon* of Veelhoek zijn, en n deszelfs wortel of zijde; dan is altijd

$$A=1, B=p-1 \text{ en } C=p-2$$

$$\text{dus } T=1+(p-1)(n-1)+\frac{(p-2)(n-1)(n-2)}{2}=\frac{(p-2)n^2-(p-4)n}{2}$$

$$\text{en } S=n+\frac{(p-1)n(n-1)}{2}+\frac{(p-2)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}=\frac{(p-2)n^3+3n^2-(p-2)n}{2 \cdot 3}$$

Waaruit de volgende Tafel kan gemaakt worden.

$$\text{Voor } p=3, \text{ is } T=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{en } S=\frac{n^3+3n^2+2n}{2 \cdot 3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{Voor } p=4, \text{ is } T=\frac{2n^2}{2}=n^2$$

$$\text{en } S=\frac{2n^3+3n^2+n}{2 \cdot 3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{Voor } p=5, \text{ is } T=\frac{3n^2-n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\text{en } S=\frac{3n^3+3n^2}{2 \cdot 3}=\frac{n^2(n+1)}{2}$$

$$\text{Voor } p=6, \text{ is } T=\frac{4n^2-2n}{2}=n(2n-1)$$

$$\text{en } S=\frac{4n^3+3n^2-n}{2 \cdot 3}=\frac{n(n+1)(4n-1)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{Voor } p=7, \text{ is } T=\frac{5n^2-3n}{2}=\frac{n(5n-3)}{2}$$

$$\text{en } S=\frac{5n^3+3n^2-2n}{2 \cdot 3}=\frac{n(n+1)(5n-2)}{2 \cdot 3}$$

Voor

Voor $p = 8$, is $T = \frac{6n^2 - 4n}{2} = n(3n-2)$

en $S = \frac{6n^3 + 3n^2 - 3n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(2n-1)}{2}$

Voor $p = 9$, is $T = \frac{7n^2 - 5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$

en $S = \frac{7n^3 + 3n^2 - 4n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(7n-4)}{2 \cdot 3}$

Voor $p = 10$, is $T = \frac{8n^2 - 6n}{2} = n(4n-3)$

en $S = \frac{8n^3 + 3n^2 - 5n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(8n-5)}{2 \cdot 3}$

Voor &c. &c. &c.

III. GEVAL.

Voor de Pyramidaal-getallen en derzelver verdere Aggregaten.

VOORBEELD.

Gegeven zijnde een Reeks van *Trigonaal-Pyramidalen*, als

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c.

3, 6, 10, 15, 21, 28, &c.

3, 4, 5, 6, 7, &c.

1, 1, 1, 1, &c.

Zoo is $A=1$, $B=3$, $C=3$ en $D=1$:

dus $T = 1 + 3(n-1) + \frac{3(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$

$S = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

De eerste *Aggregaten* dezer Getallen, of de *Pyramidalen* van het tweede Geslacht, zijn

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 5, & 15, & 35, & 70, & 126, & \&c. \\ 4, & 10, & 20, & 35, & 56, & & \&c. \\ 6, & 10, & 15, & 21, & & & \&c. \\ 4, & 5, & 6, & & & & \&c. \\ 1, & 1, & & & & & \&c. \end{array}$$

Hetwelk geeft $A=1$, $B=4$, $C=6$, $D=4$ en $E=1$: waaruit men

$$\begin{aligned} \text{vinden zal } T &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ \text{en } S &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze kan men handelen met de *Pyramidalen* en derzelve *Aggregaten*, geformeerd uit de andere *Polygonaal*-getallen; doch men kan de zaak ligtelijk algemeen beschouwen.

In het algemeen.

Als men de laatste, of gelijke verschillen stelt $p-2=a$, zoo heeft men, voor de *Pyramidalen* $1, 3+a, 6+4a, 10+10a, 15+20a, \&c.$
 1^{ste} verschillen of *Polygonalen* $2+a, 3+3a, 4+6a, 5+10a, \&c.$
 2^{de} ————— of *Arithm. Progres* $1+2a, 1+3a, 1+4a, \&c.$
 3^{de} ————— of gelijken $a, a, \&c.$

Derhalve $A=1$

$$B=2+a=p$$

$$C=1+2a=2p-3$$

$$D=a=p-2$$

Waar-

Waardoor men vindt

$$T = 1 + p(n-1) + \frac{(2p-3)(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(p-2)(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{of } T = \frac{(p-2)n^3 + 3n^2 + (5-p)n}{2 \cdot 3} = \frac{(p-2)n^3 + (p-2)n^2 + (5-p)n^2 + (5-p)n}{2 \cdot 3}$$

$$\text{dat is } T = \frac{n(n+1)}{2 \cdot 3} \times ((p-2)n + 5 - p)$$

$$\text{En } S = n + \frac{pn(n-1)}{2} + \frac{(2p-3)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \frac{(p-2)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\text{of } S = \frac{(p-2)n^4 + 2pn^3 + (14-p)n^2 + (12-2p)n}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\text{of } S = \frac{(p-2)n^4 + 3(p-2)n^3 + (6-p)n^3 + 2(p-2)n^2 + 3(6-p)n^2 + 2(6-p)n}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\text{dat is } S = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} \times ((p-2)n + 6 - p)$$

En dewijl de eerste *Aggregaten* van de *Pyramidalen*, of wel de *Pyramidalen* van het tweede Geslacht, algemeen zullen uitgedrukt worden, door

1, 4 + a, 10 + 5 a, 20 + 15 a, 35 + 35 a &c.
zal men daar in hebben

$$T = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} \times ((p-2)n + 6 - p)$$

$$\text{en } S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \times ((p-2)n + 7 - p)$$

Derhalve zal men, in 't algemeen, voor de *m*^{de} *Aggregaten* van de *Polygonalen* p, of voor de *Pyramidaal*-getallen van het *m*^{de} Geslacht, vinden de volgende algemeene *Formulen*.

$$T = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots \text{tot } m+1 \text{ termen} \times ((p-2)n + m + 4 - p)$$

$$\text{En } S = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots \text{tot } m+2 \text{ termen} \times ((p-2)n + m + 5 - p)$$

VOORBEELD.

Gegeven de Reeks

1, 10, 49, 168, 462, 1092, 2310, 4488, 8151, &c.
zijnde de *Hexagonaal-Pyramidaal*-getallen van het vierde Geslacht,
dan heeft men $p = 6$ en $m = 4$:

$$\text{bijgevolg } T = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3.4.5.6} \times (4n+2)$$

$$\text{en } S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2.3.4.5.6.7} \times (4n+3)$$

Laat $n = 9$ zijn; dan is

$$\text{de 9de Term, of } T = \frac{9.10.11.12.13}{2.3.4.5.6} \times 38 = 3.11.13.19 = 8151$$

$$\text{en de Som, of } S = \frac{9.10.11.12.13.14}{2.3.4.5.6.7} \times 39 = 3.11.13.39 = 16731.$$

BIJVOEGSEL.

De *Formule* voor de eenvoudige *Trigonaal-Pyramidalen*,

$$\text{zijnde } T = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$$

geeft den algemeenen en gewonen Regel ter berekening van een driekantig gestapelden hoop Kogels, waarvan 'er n liggen in ieder zijde van de onderste laag.

Bij voorbeeld: hoeveel Kogels liggen 'er in een driekantigen stapel, als 'er in ieder zijde van de onderste laag zijn 20?

$$\text{Antwoord: } \frac{20.21.22}{2.3} = 10.7.22 = 1540 \text{ Kogels.}$$

Zoo de stapel niet vol is, moet men ook weten hoeveel Kogels 'er liggen in iedere zijde van de bovenste laag; hiervoor het getal T voor $n-1$ eveneens zoeken en hetzelfde van den geheelen hoop aftrekken.

Bij

Bij voorbeeld: zoo van een' stapel Kogels, in de gedaante van eene geknotte driesijdige *Pyramide*, in de onderste laag liggen 24 en in de bovenste 9 Kogels in iedere zijde, moet men van het geheele getal

$$T = \frac{24 \cdot 25 \cdot 26}{2 \cdot 3} = 4 \cdot 25 \cdot 26 = 2600$$

$$\text{aftrekken } t = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 3 \cdot 4 \cdot 10 = 120$$

zoo blijven 'er 2480 Kogels.

IV. GEVAL.

Voor de Columnare-getallen.

Deze ontstaan uit de *Polygonalen* vermenigvuldigd met hunne wortels: als

Wortels	1,	2,	3,	4,	5 &c.
<i>Polygonalen</i>	1,	2 + a,	3 + 3a,	4 + 6a,	5 + 10a &c.
<i>Columnaren</i>	1,	4 + 2a,	9 + 9a,	16 + 24a,	25 + 50a &c.
		3 + 2a,	5 + 7a,	7 + 15a,	9 + 26a &c.
		2 + 5a,	2 + 8a,	2 + 11a &c.	
		3a,	3a &c.		

In deze heeft men derhalve, zijnde wederom $p = 2 + a$

$$A = 1$$

$$B = 3 + 2a = 2p - 1$$

$$C = 2 + 5a = 5p - 8$$

$$\text{en } D = 3a = 3p - 6$$

$$\text{Dus } T = 1 + (2p-1)(n-1) + \frac{(5p-8)(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(p-2)(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$$

$$\text{of } T = \frac{(p-2)n^3 - (p-4)n^2}{2} = \frac{1}{2}n^2 \left((p-2)n + 4-p \right)$$

$$\text{En } S = n + \frac{(2p-1)n(n-1)}{2} + \frac{(5p-8)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \frac{(p-2)(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4}$$

of

$$\text{of } S = \frac{(3p-6)n^4 + (2p+4)n^3 + (18-3p)n^2 + (8-2p)n}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\text{of } S = \frac{n(n+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \times (3(p-2)n^2 + (10-p)n + 8-2p)$$

Welke laatste *Formule* wederom het eerste *Aggregaat* dezer Getallen uitdrukt, en zoo vervolgens.

V. GEVAL.

Voor de Pyrgoidaal-getallen.

Deze ontstaan uit de verzameling van de *Columnaren* en *Pyramidalen*, nemende de wortels van de laatste 1 minder dan van de eerste: aldus

Wortels	1,	2,	3,	4,	5 &c.
<i>Columnaren</i>	1,	4 + 2a,	9 + 9a,	16 + 24a,	25 + 50a &c.
<i>Pyramidalen</i>	0, 1	, 3 + a,	6 + 4a,	10 + 10a &c.	
<i>Pyrgoidalen</i>	1,	5 + 2a,	12 + 10a,	22 + 28a,	35 + 60a &c.
		4 + 2a,	7 + 8a,	10 + 18a,	13 + 32a &c.
			3 + 6a,	3 + 10a,	3 + 14a &c.
			4a,	4a &c.	

Derhalve heeft men wederom $p = 2 + a$, en vervolgens

$$A = 1$$

$$B = 4 + 2a = 2p$$

$$C = 3 + 6a = 6p - 9$$

$$\text{en } D = 4a = 4p - 8$$

$$\text{Dus } T = 1 + 2p(n-1) + \frac{(6p-9)(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(4p-8)(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{of } T = \frac{4(p-2)n^3 - 3(2p-7)n^2 + (2p-7)n}{2 \cdot 3}$$

$$\text{En } S = n + pn(n-1) + \frac{(6p-9)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \frac{(p-2)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{of } S = \frac{(p-2)n^4 + 3n^3 + (5-p)n^2}{2 \cdot 3}$$

En

En zoo mede voor derzelver *Aggregaten*.

Deze laatste *Formule* vergeleken met die voor de *Polygonalen* leert ons, dat de *Som van eenige Pyrgoidalen juist gelyk is aan de Som van even zoo vele Polygonalen, vermenigvuldigd met het getal der Termen.*

VI. GEVAL.

Voor de Centrale-Polygonaal-getallen.

Deze zijn van denzelfden aard, als de eenvoudige *Polygonalen*, maar hier in zijn de laatste of gelijke verschillen p , of de naam des Veelhoeks. Zij kunnen daarom uitgedrukt worden, door

$$1, 1+p, 1+3p, 1+6p, 1+10p \text{ \&c.}$$

$$p, 2p, 3p, 4p \text{ \&c.}$$

$$p, p, p, \text{ \&c.}$$

Derhalve is $A = 1$ en $B = C = p$:

$$\text{Dus } T = 1 + p(n-1) + \frac{p(n-1)(n-2)}{2} = \frac{pn(n-1)}{2} + 1$$

$$\text{En } S = n + \frac{pn(n-1)}{2} + \frac{pn(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = \frac{pn(n^2-1)}{2 \cdot 3} + n$$

Hieruit kunnen wederom *Pyramidalen*, *Columnaren* en *Pyrgoidalen* geformeerd worden, welker algemeene Formulen op dezelfde wijze te vinden zijn; als mede voor de nog overige Figuurlijke Getallen: doch hiervan aftappende, ga ik over tot de *Interpolatie*.

INTERPOLATIE.

Hier door verstaat men, om eenige ontbrekende termen in eene gegevene *Seriës* te vinden; als mede, om tusschen derzelver termen andere getallen intevullen, zoodanig dat deze aangevulde *Seriës* volgens dezelfde wet voortloopt, als de gegevene. Het eerste geschiedt gemakkelijk door de *Formule* voor den Algemeenen Term, en voor het laatste dient het volgend

D

TWEE-

TWEEDE ALGEMEEN VOORSTEL.

Om tusschen twee op elkander volgende Termen, in eene gegevene *Arithmetische Seriës*, één, twee, of meer Termen te *interpoleren*?

OPLOSSING.

Zoek, volgens het *Eerste Voorstel*, de Wet van de *Seriës*, dat is, derzelver algemeenen Term. Laat 'er begeerd worden, om tusschen de m^{de} en $m+1^{\text{de}}$ termen van deze *Seriës* eenige intevullen. Als 'er dan maar één term tusschen beide moet komen, zoo neem $n = m + \frac{1}{2}$. Als 'er twee termen tusschen beide moeten komen, neem $n = m + \frac{1}{3}$ en $n = m + \frac{2}{3}$. Voor drie termen neem $n = m + \frac{1}{4}$, $m + \frac{2}{4}$, $m + \frac{3}{4}$ enz. In het algemeen, voor p termen tusschen beide, neem achtereenvolgende

$$n = m + \frac{1}{p+1}, m + \frac{2}{p+1}, m + \frac{3}{p+1} \text{ \&c. . . . tot } m + \frac{p}{p+1};$$
 en dus voor de r^{de} term der p tusschengevoegden

$$n = m + \frac{r}{p+1}.$$

Dat te vinden was.

I. VOORBEELD.

Gegeven zijnde 1, 3, 5, 7, 9, 11 &c. waarvan de eerste verschillen gelijk zijn en $T = 2n - 1$ is; om hier tusschen beide telkens één term intevullen, wordt $n = m + \frac{1}{2}$ genomen, waar door men heeft $T = 2m + 1 - 1 = 2m$, en dus voor $m = 1, 2, 3, 4, 5$ &c. $T = 2, 4, 6, 8, 10$ &c. en de nieuwe *Seriës* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 &c., welke van denzelfden aard is, als de gegevene, hebbende ook de eerste verschillen alle gelijk.

2. VOOR-

2. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde 1, 6, 15, 28 &c. waarvan de tweede verschillen gelijk zijn, en $T = n(2n-1)$ is.

1. Om hier tusschen overal één term te *interpoleren*, zoo neem $n = m + \frac{1}{2}$; dan wordt $T = (m + \frac{1}{2}) 2m = m(2m+1)$, en dus voor $m = 1, 2, 3, 4$ &c.

$$\text{is } T = 3, 10, 21, 36 \text{ \&c.}$$

en de nieuwe *Seriës* 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 &c.

2. Om 'er twee termen tusschen beide intevoegen, zoo neem $n = m + \frac{1}{3}$ en $n = m + \frac{2}{3}$; waardoor men heeft

$$T = \frac{(3m+1)(6m-1)}{3 \cdot 3} \text{ en } \bar{T} = \frac{(3m+2)(6m+1)}{3 \cdot 3}$$

En dus voor $m = 1, 2, 3$ &c.

$$T = \frac{20}{9}, \frac{77}{9}, \frac{170}{9} \text{ \&c.}$$

$$\text{en } \bar{T} = \frac{35}{9}, \frac{104}{9}, \frac{209}{9} \text{ \&c.}$$

En de nieuwe *Seriës* zal zijn

$$1, 2\frac{2}{9}, 3\frac{8}{9}, 6, 8\frac{5}{9}, 11\frac{5}{9}, 15, 18\frac{8}{9}, 23\frac{2}{9}, 28 \text{ \&c.}$$

$$1^{\text{ste}} \text{ verschillen } 1\frac{2}{9}, 1\frac{6}{9}, 2\frac{1}{9}, 2\frac{5}{9}, 3, 3\frac{4}{9}, 3\frac{8}{9}, 4\frac{3}{9}, 4\frac{7}{9} \text{ \&c.}$$

$$2^{\text{de}} \text{ of gelijke } \frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9} \text{ \&c.}$$

3. Om alleen tusschen de 3^{de} en 4^{de} termen, of tusschen de getallen 15 en 28, nog 9 andere te *interpoleren*, of intelaschen, zoo heeft

$$\text{men dat voor } n = 3\frac{1}{10} \text{ is } T = \frac{31 \cdot 52}{10 \cdot 10} = 16,12$$

$$n = 3\frac{2}{10} - T = \frac{32 \cdot 54}{10 \cdot 10} = 17,28$$

$$n = 3\frac{3}{10} - T = \frac{33 \cdot 56}{10 \cdot 10} = 18,48$$

D 2

n =

$$n = 3\frac{4}{10} \text{ is } T = \frac{34 \cdot 58}{10 \cdot 10} = 19,72$$

$$n = 3\frac{5}{10} - T = \frac{35 \cdot 60}{10 \cdot 10} = 21,00$$

$$n = 3\frac{6}{10} - T = \frac{36 \cdot 62}{10 \cdot 10} = 22,32$$

$$n = 3\frac{7}{10} - T = \frac{37 \cdot 64}{10 \cdot 10} = 23,68$$

$$n = 3\frac{8}{10} - T = \frac{38 \cdot 66}{10 \cdot 10} = 25,08$$

$$n = 3\frac{9}{10} - T = \frac{39 \cdot 68}{10 \cdot 10} = 26,52$$

En de geïnterpoleerde *Sariës* zal zijn

	15	16,12	17,28	18,48	19,72	21	22,32	23,68	25,08	26,52	28
1 ^e V.	1,12	1,16	1,20	1,24	1,28	1,32	1,36	1,40	1,44	1,48	
2 ^e V.	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	

4. Om de 57^{ste} van de 100 Termen te vinden, die tusſchen 15 en 28 kunnen ingezet worden, heeft men $n = 3\frac{57}{101} = \frac{360}{101}$

$$\text{en } T = \frac{360 \cdot 619}{101 \cdot 101} = 21\frac{8619}{10201}, \text{ de begeerde.}$$

Men kan anders ook wel 15 voor den eerſten term nemen, waardoor men heeft $A=15$, $B=13$ en $C=4$; en hieruit

$$T = 15 + 13(n-1) + \frac{4(n-1)(n-2)}{2} = 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$$

Nemende dan $n = 1\frac{57}{101} = \frac{158}{101}$; zoo is wederom

$$T = \frac{360 \cdot 619}{101 \cdot 101} = 21\frac{8619}{10201}$$

3. V O O R B E E L D.

Gegeven de Teerlings-getallen 1, 27, 125, 343 &c. waarvan de derde verschillen gelijk zijn, en de algemeene Term is $(2n-1)^3$.

1. Om tusschen beide één Term invullen, moet men nemen $n = m + \frac{1}{2}$; waardoor men heeft $T = (2m)^3$: dus voor $m = 1, 2, 3, \&c.$

komt $T = 8, 64, 216, \&c.$

En de aangevulde Seriës is 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343 &c.

2. Om tusschen beide twee Termen te brengen, moet men nemen $n = m + \frac{1}{3}$ en $n = m + \frac{2}{3}$; waardoor men heeft

$$T = \left(\frac{6m-1}{3}\right)^3 \text{ en } \bar{T} = \left(\frac{6m+1}{3}\right)^3.$$

Dus voor $m = 1, 2, 3, \&c.$

$$\text{komt } T = \left(\frac{5}{3}\right)^3, \left(\frac{11}{3}\right)^3, \left(\frac{17}{3}\right)^3 \&c.$$

$$\text{en } \bar{T} = \left(\frac{7}{3}\right)^3, \left(\frac{13}{3}\right)^3, \left(\frac{19}{3}\right)^3 \&c.$$

En de aangevulde Seriës zal zijn,

$$1, 4\frac{17}{27}, 12\frac{19}{27}, 27, 49\frac{8}{27}, 81\frac{10}{27}, 125, 181\frac{26}{27}, 254\frac{1}{27}, 343$$

$$3\frac{17}{27}, 8\frac{2}{27}, 14\frac{8}{27}, 22\frac{8}{27}, 32\frac{2}{27}, 43\frac{17}{27}, 56\frac{26}{27}, 72\frac{2}{27}, 88\frac{26}{27}$$

$$4\frac{12}{27}, 6\frac{6}{27}, 8, 9\frac{21}{27}, 11\frac{15}{27}, 13\frac{9}{27}, 15\frac{3}{27}, 16\frac{24}{27}$$

$$1\frac{21}{27}, 1\frac{21}{27}, 1\frac{21}{27}, 1\frac{21}{27}, 1\frac{21}{27}, 1\frac{21}{27}, 1\frac{21}{27}$$

3. Om de 7^{de} te vinden van de 9 Teerlingen, die tusschen 1 en 27 invallen; neme men $n = 1\frac{7}{10}$ en hierdoor heeft men

$$T = (2n-1)^3 = \left(\frac{24}{10}\right)^3 = \left(\frac{12}{5}\right)^3 = \frac{1728}{125} = 13\frac{103}{125}.$$

I. A A N M E R K I N G.

In de voorgaande Voorbeelden kan men duidelijk genoeg de algemeene handelwijze ontdekken, volgens welke alle *Arithmetische Seriën* kunnen *geïnterpoleerd* worden. Men kan anders voor elke bijzondere soort derzelve ook wel bijzondere *Formulen*, of *Regels*, uit het voorgaande afleiden, zoo als men die bij eenige *Autheuren* vindt opgegeven. Voor de *Seriën*, welker eerste verschillen gelijk zijn, is dit niet noodig, en daarom zal ik alleen die gene nemen, welke gelijke tweede of derde verschillen hebben.

I. *Voor de Seriën, welker tweede verschillen gelijk zijn.* De algemeene *Formule* voor den algemeenen Term is

$$T = A + (n-1) B + \frac{(n-1)(n-2)}{2} C.$$

Om nu de r^{de} term te vinden van de p termen, welke tusschen de m^{de} en $m+1^{\text{de}}$ termen van de gegeven *Seriës* moet ingezet worden, heeft men $n = m + \frac{r}{p+1}$, of om dat de m^{de} term voor de eerste kan genomen worden, (zijnde nu A) kan men stellen $m=1$, dus $n-1 = \frac{r}{p+1}$ en derhalve heeft men voor het gene, dat bij A gevoegd moet worden.

$$X = \frac{r}{p+1} \times B + \frac{r}{p+1} \left(\frac{r}{p+1} - 1 \right) \frac{C}{2} = \left(B + \frac{C}{2} \left(\frac{r}{p+1} - 1 \right) \right) \times \frac{r}{p+1};$$

stellende dan $\frac{r}{p+1} = a$ en $a-1 = b$, zoo is

$$X = \left(B + \frac{1}{2} b C \right) a, \text{ zijnde de } \textit{Formule} \text{ van GARDINER.}$$

Maar nemende p voor r en m voor $p+1$, zoodat $\frac{r}{p+1} = \frac{p}{m}$ en

$$\frac{r}{p+1} - 1 = \frac{p}{m} - 1 = \frac{p-m}{m} \text{ is, zoo heeft men}$$

$$X = p \times \frac{B}{m} + p \times \frac{p-m}{2} \times \frac{C}{m^2}$$

$$\text{of } X = p \times \frac{B}{m} - p \times \frac{m-p}{2} \times \frac{C}{m^2}, \text{ zijnde de } \textit{Formule} \text{ van LA LANDE.}$$

II. *Voor*

II. *Voor de Seriën, welker derde verschillen gelijk zijn.*

Voor deze is $T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}D$.

Stellende derhalve, als boven, zoo is

$$X = \left(B + \frac{1}{2}bC + \frac{1}{6}D(b^2 - b) \right) a, \text{ volgens GARDINER.}$$

$$\text{en } X = p \times \frac{B}{m} - p \times \frac{m-p}{2} \times \frac{C}{m^2} + p \times \frac{(m-p)(2m-p)}{6} \times \frac{D}{m^3}, \text{ volgens LA}$$

LANDE, in *Mem. de l'Ac.* 1761.

Doch door de toepassing van deze bijzondere *Formulen* op eenige voorbeelden zal men bevinden, dat dezelve, over het algemeen, geen voordeel of gemak aanbrengen; weshalve wij een ieder aanraden, om zich liever bij de verklaarde algemeene handelwijze te houden, die, behalve hare algemeenheid, ook doorgaans de gemakkelijkste is, gelijk in het vervolg blijken zal: terwijl men echter, in bijzondere gevallen, wanneer men vele gelijksoortige berekeningen achter elkander te verrigten heeft, zoo als in de zamenstelling, bij voorbeeld, van *Astronomische Ephemeriden*, vooraf al dat gene bepalen kan, hetwelk voor alle die berekeningen standvastig, of hetzelfde blijft. Ook kan men gemakkelijk, door deze zelfde handelwijze, *Hulptafelen* vervaardigen, waardoor dit soort van berekeningen dikwijls aanmerkelijk kan verkort worden, en waarvan men zich dus in het werkdadige met veel voordeels bedient: hoedanige *Hulptafelen* men vinden kan, onder N^o. XI, XII en XIII, van de *Verzameling van Tafels*, behoorende tot de *Verhandeling over het bepalen der Lengte op Zee enz.* door den Hoogleeraar J. H. VAN SWINDEN, en bij meer andere Schrijvers; doch de grootste en uitvoerigste *Tafelen* van dien aard, voor zoo verre mij bekend is, zijn *A Sexagesimal Table &c.* bij MICHAEL TAYLOR, in 1780 uitgegeven te Londen, door de *Commissioners of Longitude*.

II. A A N M E R K I N G.

Men moet, bij het gebruik van deze handelwijze, wel onder het oog houden, dat wij altijd ondersteld hebben, dat de Termen van
de

de gegevene *Seriës*, zoo wel als die van derzelver Verschillen, gedurig aanwasfen, of dat B, C, D &c. oorspronkelijk alle als *affirmatief* zijn genomen; zoo dat men naauwkeurig acht moet geven op de gevallen, waarin deze grootheden B, C, D &c., of eenige derzelven, *negatief* mogten worden, om daarna de algemeene *Formule* voor T te bewerken; ten welken einde men best doet, om, bij de gedurige aftrekkingen, altijd de teekens + of — te stellen, zoo als vereischt wordt bij eene *Algebraïsche Subtractie*.

Ook heeft men, in de voorgaande Voorbeelden, zich enkel bepaald tot zuivere *Arithmetische Seriën*, welker verschillen, na eenige aftrekkingen, gelijk aan elkander worden, waardoor de *Interpolatie* dan ook volkomen heeft kunnen geschieden. Maar de Reeksen van getallen, die meest in de *Praktyk* voorkomen, om *geïnterpoleerd* te worden, zijn zelden van zulk eenen aard, en leveren meest altijd ongelijke verschillen op: doch het is, voor dezelfde *Praktyk*, genoegzaam en voldoende, om of de eerste, of de tweede, of de derde enz. dezer verschillen, als gelijk aantemerken, naar mate dezelve kleiner worden, en de naauwkeurigheid der berekening vordert; mits dan het gemiddelde van die verschillen nemende. In de meeste gevallen vergenoegt men zich met de eerste verschillen gelijk te nemen, of te stellen $T = A + (n-1) B$, of, dat hetzelfde is, alleen het proportionaal gedeelte te gebruiken; gelijk voor alles wat de Zon, en de meeste *Planeten* betreft; alsmede in het gebruik van de Driehoekstafelen en *Logarithmen*: hoewel men voor de *Tangens* en *Secans* van Bogen, die nabij de 90 graden komen, alsmede voor de *Logarithmen* der eerste 100 N^o., niet wel deze onderstelling volgen kan, maar liever de tweede Verschillen en zelfs somtijds de derde, moet gelijk nemen en stellen $T = A + (n-1) B + (n-1)(n-2) \frac{C}{2}$; welke *Formule* ook vooral voor de Maan moet gebruikt worden. Wij zullen tot opheldering van het een en ander hier eenige voorbeelden laten volgen.

I. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de regte opklimmingen van de Maan te *Teneriffe* in A°. 1788, den

	A.	B.	C.
2 Mei op Middernacht	3° 5'	+ 6° 13'	
3 — op Middag	9. 18	6. 22	+ 9' } gemiddeld + 11'.
3 — op Middernacht	15. 40	6. 35	18
4 — op Middag	22. 15		

Om nu te vinden de Maans regte Opklimming op den 3^{de} Mei
1. ten 2 uren na den middag?

Nemende dan den 3^{de} Mei op Middag als het begin of de eerste Term dezer *Seriës*, zoo is $A = 9^{\circ} 18'$, $B = + 6^{\circ} 22'$ en $C = + 11'$.

Voorts $n = 1\frac{2}{12} = 1\frac{1}{6}$: dus $n-1 = \frac{1}{6}$ en $n-2 = -\frac{5}{6}$.

$$\text{Derhalve } T = A + \frac{1}{6} B + \frac{1}{6} \times -\frac{5}{6} \times \frac{C}{2}$$

$$\text{of } T = A + \frac{1}{6} B - \frac{5}{72} C$$

Bijgevolg bij $A = 9^{\circ} 18'$

geteld $\frac{1}{6}$ van $6^{\circ} 22' = 1. 3. 40''$

10. 21. 40''

hier af $\frac{5}{72}$ van $11' = 46''$ nagenoeg

komt 10. 20. 54'' voor de begeerde Regte Opklimming van de Maan ten 2 uren.

2. Om hetzelfde te vinden, 's avonds ten 10 uren?

Nu is $n = 1\frac{5}{6}$: dus $n-1 = \frac{5}{6}$ en $n-2 = -\frac{1}{6}$.

$$\text{Derhalve } T = A + \frac{5}{6} B - \frac{5}{72} C$$

E

Bij-

Bijgevolg bij A = 9° 18'

geteld $\frac{5}{6}$ van 6° 22' = 5. 18. 20"

14. 36. 20"

hier af $\frac{5}{72}$ van 11' = 46" nagenoeg.

komt 14. 35. 34" voor de begeerde Regte
Opklimming ten 10 uren des avonds.

B I J V O E G S E L.

Daar 10 uren des avonds even hetzelfde is, als 2 uren voor Mid-
dernacht en in dit geval de *Correctie* der tweede verschillen $-\frac{5}{72}$ C
even groot is, als te voren voor 2 uren namiddag; zoo blijkt, dat
op gelijke uren voor- en namiddag en voor- en namiddernacht de
verbetering, die men uit hoofde der tweede verschillen in deze
berekening moet aanbrengen, volmaakt dezelfde is; zoo als mede
voor de Maans *Declinatie*, Lengte en Breedte en in het algemeen
in alle gevallen plaats heeft, alwaar men de grootheden van 12 tot
12 uren bekend heeft: en dit is de reden, waarom de Verbete-
ringstafel voor de tweede verschillen niet verder dan tot 6 uren
behoeft berekend te worden.

2. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de Maans Lengte te *Greenwich* in A° 1780. den

	A.	B.	C.
19 Maart op Middernacht	5°. 21° 34' 14"	+7° 29' 8"	-3' 16"
20 — op Middag	5. 29. 3. 22	7. 25. 52	4. 20 } -3' 48"
20 — op Middernacht	6. 6. 29. 14	7. 21. 32	
21 — op Middag	6. 13. 50. 46		

Men

Men vraagt naar de Lengte den 20^{sten} *Maart* 's avonds ten 8 u. 42' 54"?

Hier is $A = 5^{\circ} 29' 3'' 22''$

$B = + 7. 25. 52$

$C = - 3. 48.$

Voorts $8 \text{ u. } 42' 54'' = 8 \text{ u. } 42',9 = 8^{\text{u}},715$ zijnde, zoo is

$$n = 1 + \frac{8,715}{12}; \text{ dus } n - 1 = \frac{8,715}{12} = \frac{2,905}{4}$$

$$\text{en } n - 2 = - \frac{3,285}{12} = - \frac{1,095}{4}$$

Bijgevolg $A = 5^{\circ} 29' 3'' 22''$

$$\frac{2,905}{4} \times B \dots\dots = 5. 23. 48,6$$

$$\frac{2,9}{4} \times - \frac{1,1}{4} \times - 114'' = \underline{\quad 22,8 \quad}$$

komt 6. 4. 27. 33,4 voor het begeerde.

3. V O O R B E E L D.

De Maans Breedte te vinden te *Greenwich* den 14^{de} *Augustus* 1798.
's morgens ten 6 uren?

	A.	B.	C.
13 <i>Aug.</i> op Middag	$4^{\circ} 54' 22''$		
13 — op Middern.	$4. 43. 36$	$10' 46''$	
14 — op Middag	$4. 27. 58$	$15. 38$	$4. 52$
14 — op Middern.	$4. 7. 53$	$20. 5$	$4. 27$

Hier is $A = 4^{\circ} 43' 36''$

$B = - 15. 38$

$C = - 4. 39\frac{1}{2}$

Voorts $n = 1\frac{1}{2}$ zijnde, is $n - 1 = \frac{1}{2}$ en $n - 2 = - \frac{1}{2}$

Dus $A = 4^{\circ} 43' 36''$

$$\frac{1}{2} B = - \frac{7. 49}{4. 35. 47}$$

$$\frac{1}{2} \times - \frac{1}{2} \times \frac{C}{2} = + \quad 35 \text{ nagenoeg}$$

komt 4. 36. 22 de Maans N. Breedte.

4. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de Maans ware Afstanden van de Ster *Antares* te *Greenwich*, in 1798 den

	A.	B.	C.	D.
11 Sept. op md. 61° 17' 17"				(1. 15)
— — op mn. 53. 44. 47		— 7° 32' 30"	+ 4' 14"	+ 1' 10"
12 — op md. 46. 16. 31		— 7. 28. 16	5. 24	1. 5
— — op mn. 38. 53. 39		— 7. 22. 52	6. 29	(1. 0)
13 — op md. 31. 37. 16		— 7. 16. 23		

Om tusschen deze de Afstanden van 3 tot 3 Uren te *interpoleren*?

Voor 3 U. namiddag of middernacht is $n = 1\frac{3}{12} = 1\frac{1}{4}$: dus $n - 1 = \frac{1}{4}$,

$n - 2 = -\frac{3}{4}$ en $n - 3 = -\frac{7}{4}$: derhalve

$$T = A + \frac{1}{4}B - \frac{3}{32}C + \frac{7}{128}D.$$

Voor 6 U. namiddag of middernacht is $n = 1\frac{6}{12} = 1\frac{1}{2}$: dus $n - 1 = \frac{1}{2}$,

$n - 2 = -\frac{1}{2}$ en $n - 3 = -\frac{3}{2}$: derhalve

$$T = A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{8}C + \frac{1}{16}D.$$

Voor 9 U. na middag of middernacht is $n = 1\frac{9}{12} = 1\frac{3}{4}$: dus $n - 1 = \frac{3}{4}$,

$n - 2 = -\frac{1}{4}$ en $n - 3 = -\frac{5}{4}$: derhalve

$$T = A + \frac{3}{4}B - \frac{3}{32}C + \frac{5}{128}D.$$

Als wij nu, in deze berekeningen, tot op de derde verschillen willen acht geven, waarvan wij 'er maar twee, namelijk 1' 10' en 1' 5" bekend hebben, kunnen wij 'er ter wederzijde nog een bijvoegen, in eene *Arithmetische Progresie* met de gegevene voortloopen- de, zijnde dan 1' 15" en 1' 0", zoo als wij dezelve, tusschen de () staande, 'er bijgevoegd hebben.

1°. Om dan de Afstanden van 3 tot 3 Uren intevullen, vooreerst, tus-

tusfchen die van 11 Sept. op middag en middernacht, zoo heeft men

$$A = 61^{\circ} 17' 17''$$

$$B = - 7. 32. 30$$

$$C = + 4. 14$$

$$D = + 1. 12,5; \text{ zijnde het gemiddelde van } 1' 15'' \text{ en } 1' 10''.$$

$$\text{Derhalve } A = 61^{\circ} 17' 17''$$

$$\frac{1}{4} B = - 1. 53. 7,5$$

$$59. 24. 9,5$$

$$\frac{3}{32} C = - 23,8$$

$$59. 23. 45,7$$

$$\frac{7}{128} D = + 4,0$$

$$59. 23. 49,7 \text{ de Afstand ten 3 Uren.}$$

$$\text{Wederom } A = 61^{\circ} 17' 17''$$

$$\frac{1}{2} B = - 3. 46. 15$$

$$57. 31. 2$$

$$\frac{3}{8} C = - 31,7$$

$$57. 30. 30,3$$

$$\frac{1}{16} D = + 4,5$$

$$57. 30. 34,8 \text{ de Afstand ten 6 U.}$$

$$\text{Nog eens } A = 61^{\circ} 17' 17''$$

$$\frac{3}{4} B = - 5. 49. 22,5$$

$$55. 37. 54,5$$

$$\frac{3}{32} C = - 23,8$$

$$55. 37. 30,7$$

$$\frac{5}{128} D = + 2,8$$

$$55. 37. 33,5 \text{ de Afstand ten 9 U.}$$

2°. Tusfchen 11 Sept. op middernacht en 12 Sept. op middag, is

$$A = 53^{\circ} 44' 47''$$

$$B = - 7. 28. 16$$

$$C = + 5. 24$$

$$D = + 1. 7\frac{1}{2}$$

E 3

Der-

Derhalve $A = 53^{\circ} 44' 47'' \dots\dots 53^{\circ} 44' 47'' \dots\dots 53^{\circ} 44' 47''$

$\frac{1}{4} B = -1. 52. 4$	$\frac{1}{2} B = -3. 44. 8$	$\frac{3}{4} B = -5. 36. 12$
$51. 52. 43$	$50. 0. 39$	$48. 8. 35$
$\frac{3}{32} C = -30,4$	$\frac{1}{8} C = -40,5$	$\frac{3}{32} C = -30,4$
$51. 52. 12,6$	$49. 59. 58,5$	$48. 8. 4,6$
$\frac{7}{128} D = +3,7$	$\frac{1}{16} D = +4,2$	$\frac{5}{128} D = +2,6$
$51. 52. 16,3$	$50. 0. 2,7$	$48. 8. 7,2$
ten 3 U.	ten 6 U.	ten 9 U.

3°. Tusschen 12 Sept. op middag en middernacht, is

$A = 46^{\circ} 16' 31''$
 $B = -7. 22. 52$
 $C = +6. 29$
 $D = +1. 2,5$

Derhalve $A = 46^{\circ} 16' 31'' \dots\dots 46^{\circ} 16' 31'' \dots\dots 46^{\circ} 16' 31''$

$\frac{1}{4} B = -1. 50. 43$	$\frac{1}{2} B = -3. 41. 26$	$\frac{3}{4} B = -5. 32. 9$
$44. 25. 48$	$42. 35. 5$	$40. 44. 22$
$\frac{3}{32} C = -36,5$	$\frac{1}{8} C = -48,6$	$\frac{3}{32} C = -36,5$
$44. 25. 11,5$	$42. 34. 16,4$	$40. 43. 45,5$
$\frac{7}{128} D = +3,4$	$\frac{1}{16} D = +3,9$	$\frac{5}{128} D = +2,4$
$44. 25. 14,9$	$42. 34. 20,3$	$40. 43. 47,9$
ten 3 U.	ten 6 U.	ten 9 U.

4°. Eindelijk, om de Afstanden te vinden tusschen den 12 Sept. op middernacht en den 13^{de} op middag, dewijl men hiervoor geen tweede verschil, of C, bekend heeft, kan men de *Seriës* anders om nemen, namelijk aldus

	A.	B.	C.	D.
13 Sept. op midd.	$31^{\circ} 37' 16''$	$+7^{\circ} 16' 23''$	$+6' 29''$	
12 — op midn.	$38. 53. 39$	$7. 22. 52$	$5. 24$	$-1' 5''$
12 — op midd.	$46. 16. 31$	$7. 28. 16$	$4. 14$	$-1' 7\frac{1}{2}''$
11 — op midn.	$53. 44. 47$	$7. 32. 30$		
11 — op midd.	$61. 17. 17$			

Waar-

Waaruit men dan heeft

$$A = 31^{\circ} 37' 16''$$

$$B = + 7. 16. 23$$

$$C = + 6. 29$$

$$D = - 1. 7,5$$

$$\text{Dus } A = 31^{\circ} 37' 16'' \dots 31^{\circ} 37' 16'' \dots 31^{\circ} 37' 16''$$

$$\frac{1}{4} B = + 1. 49. 5,7 \quad \frac{1}{2} B = 3. 38. 11,5 \quad \frac{3}{4} B = + 5. 27. 17,2$$

$$33. 26. 21,7 \quad 35. 15. 27,5 \quad 37. 4. 33,2$$

$$\frac{3}{32} C = - 36,5 \quad \frac{1}{8} C = - 48,6 \quad \frac{3}{32} C = - 36,5$$

$$33. 25. 45,2 \quad 35. 14. 38,9 \quad 37. 3. 56,7$$

$$\frac{7}{128} D = - 3,4 \quad \frac{1}{16} D = - 3,9 \quad \frac{5}{128} D = - 2,4$$

$$33. 25. 41,8 \quad 35. 14. 35 \quad 37. 3. 54,3$$

ten 3 u. voor mn. ten 6 u. voor mn. ten 9 u. voor mn.

of 9 u. na md. of 6 u. na md. of 3 u. na md.

Als wij nu alle deze gevondene Afstanden in orde stellen, verkrijgen wij de navolgende Tafel.

	1 ^{ste} Verschillen.	2 ^{de} Verschil.	3 ^{de} Verschil.
11 Sept. op md. $61^{\circ} 17' 17''$	$- 1^{\circ} 53' 27'',3$	$- 12'',4$	$+ 1'',2$
3 u. 59. 23. 49,7	1. 53. 14,9	13,6	1,2
6 u. 57. 30. 34,8	1. 53. 1,3	14,8	1,0
9 u. 55. 37. 33,5	1. 52. 46,5	15,8	1,3
11 Sept. op mn. 53. 44. 47	1. 52. 30,7	17,1	1,0
3 u. 51. 52. 16,3	1. 52. 13,6	18,1	1,2
6 u. 50. 0. 2,7	1. 51. 55,5	19,3	0,8
9 u. 48. 8. 7,2	1. 51. 36,2	20,1	1,4
12 Sept. op md. 46. 16. 31	1. 51. 16,1	21,5	0,7
3 u. 44. 25. 14,9	1. 50. 54,6	22,2	1,3
6 u. 42. 34. 30,3	1. 50. 32,4	23,5	0,7
9 u. 40. 43. 47,9	1. 50. 8,9	24,2	1,2
12 Sept. op mn. 38. 53. 39	1. 49. 44,7	25,4	0,7
3 u. 37. 3. 54,3	1. 49. 19,3	26,1	1,3
6 u. 35. 14. 35	1. 48. 53,2	27,4	
9 u. 33. 25. 41,8	1. 48. 25,8		
13 Sept. op md. 31. 37. 16			waar-

waarin de derde verschillen alle nagenoeg even groot zijn en dus de ingevulde Afstanden met de gegevene in de vereischte orde staan.

B I J V O E G S E L.

Op deze wijze worden de Afstanden van de Maan tot de Zon en Sterren gevonden, zoo als men die dagelijks in de *Ziemans-Almanakken*, van 3 tot 3 uren geplaatst ziet, nadat men diezelfde Afstanden op middag en middernacht, of van 12 tot 12 uren, met de vereischte naauwkeurigheid, uit de oorspronkelijke Maans- en Zons-tafelen, berekend heeft. Op die wijze kunnen ook de Maans-declinationen geïnterpoleerd worden, zoo als men dezelve tegenwoordig jaarlijks in de *Conn. des Temps* aantreft. Bij TAYLOR vindt men, in het aangehaalde Werk, eene bijzondere Tafel, om deze *Interpolatien* van 3 tot 3 uren nog gemakkelijker uittevoeren. Ook ziet men hieruit den oorsprong der *Formulen*, die voor deze berekening in de verklaring van den *Nautical Almanac* op bladz. 161 gevonden worden.

5. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de *Logar. Sin.* van

A.	B.	C.
$1^{\circ} 0' = 8,2418553$		
$1. 1 = 8,2490332$	$+ 71779$	$- 1168$
$1. 2 = 8,2560943$	70611	1130
$1. 3 = 8,2630424$	69481	$- 1149$

1^o. Om te vinden de *Log. Sin.* van $1^{\circ} 1' 40''$.

Hier is $n = 1' 40'' = 1\frac{2}{3}$; dus $n-1 = \frac{2}{3}$ en $n-2 = -\frac{1}{3}$:

daarom $T = A + \frac{2}{3}B - \frac{1}{9}C$. Derhalve $A = 8,2490332$

$$\frac{2}{3} \times 70611 = + 47074$$

$$- \frac{1}{9} \times - 1149 = + 127$$

komt 8,2537533 de begeerde

de *Log. Sin.* van $1^{\circ} 1' 40''$, dat nu tot de laatste letter naauwkeurig is.

2^o. Om te vinden de *Log. Sin.* van $1^{\circ} 1' 23''$:

dan is $n = 1' 23''$: dus $n-1 = \frac{23}{60}$ en $n-2 = -\frac{37}{60}$:

daarom $T = A + \frac{23}{60} B - \frac{851}{7200} C$. Derhalve $A = 8,2490332$

$$\begin{aligned} \frac{23}{60} \times 70611 &= + 27067,5 \\ - \frac{851}{7200} \times -1149 &= + 135,8 \end{aligned}$$

komt 8,2517535 voor de

Log. Sin. van $1^{\circ} 1' 23''$, zijnde mede naauwkeurig tot in de laatste letter.

6. VOORBEELD.

Om de *Log.* van $2\frac{1}{4}$ te vinden? —

1^o. Nemende alleen het eerste verschil, of $T = A + (n-1) B$.

$$\begin{array}{l|l} \text{Log. } 2 = 0,3010300 & \\ \text{— } 3 = 0,4771213 & 0,1760913 \end{array}$$

Nu is $n = 1\frac{1}{4}$: daarom $T = A + \frac{1}{4} B$. Derhalve $A = 0,3010300$

$$\frac{1}{4} B = 0,0440228$$

Dus zou 0,3450528

de *Log.* van $2\frac{1}{4}$ moeten zijn, waarvan dit echter zeer aanmerkelijk verschilt, zijnde *Log.* $2\frac{1}{4} = 0,3521825$.

2^o. Nemende de tweede verschillen, of $T = A + (n-1) B + (n-1)(n-2) \frac{C}{2}$.

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Log. } 1 = 0 & & \\ \text{— } 2 = 0,3010300 & 0,3010300 & \\ \text{— } 3 = 0,4771213 & 0,1760913 & \\ \text{— } 4 = 0,6020600 & 0,1249387 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ - 0,1249387 \\ 0,0511526 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ - 880456 \end{array}$$

Nu is wederom $n = 1\frac{1}{4}$: daarom $T = A + \frac{1}{4} B - \frac{3}{32} C$.

$$\text{Derhalve } A + \frac{1}{4} B = 0,3450528$$

$$- \frac{3}{32} C = + 82543$$

Dus zou 0,3533071 de

Log. van $2\frac{1}{4}$ moeten zijn, komende veel nader dan de vorige.

3^o. Némende de derde verschillen,

$$\text{of } T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2} C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} D.$$

$$\text{dat is } T = A + \frac{1}{4} B - \frac{3}{32} C + \frac{7}{128} D.$$

Log. 1 = 0

2 = 0,3010300	0,3010300	- 1249387	+ 7378612 2312395 } + 484550
3 = 0,4771213	0,1760913	511526	
4 = 0,6020600	0,1249387	280287	
5 = 0,6989700	0,0969100		

$$\text{Derhalve } A + \frac{1}{4} B = 0,3450528$$

$$- \frac{3}{32} C = + 47956$$

$$\frac{7}{128} D = + 26499$$

Dus zou 0,3524983 de Log. van $2\frac{1}{4}$ moeten zijn, dat wel nader komt, maar echter nog te veel van de waarheid afwijkt: zoo dat men in dit en soortgelijke gevallen de gedurige verschillen nog veel verder zou moeten nemen.

III. A A N M E R K I N G.

Dewijl in de algemeene *Formule*

$$T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}D + \&c.$$

A beteekent den eersten Term zelf van de *Seriës*,
 B — — — — — der eerste Verschillen,
 C — — — — — tweede — — — — —,
 D — — — — — derde — — — — —,
 &c. — — — — — &c.

zal men A altijd kunnen aanmerken als bekend te zijn, dewijl men een Reeks met een der Termen naar welgevalle kan stellen te beginnen; maar, om B te bepalen, zal men twee Termen ten minsten moeten bekend hebben; om C te vinden ten minsten drie; om D te vinden ten minsten vier enz. Derhalve, zoo het een Reeks is van eerste gelijke verschillen, zal het genoeg zijn, dat men twee Termen daarvan bekend hebbe, om alle andere Termen te vinden, door de *Formule*

$$T = A + (n-1)B.$$

Zoo het een Reeks is van tweede gelijke verschillen, zal men drie Termen daarvan bekend moeten hebben, om de overige te berekenen, door de *Formule*

$$T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C.$$

Zoo het een Reeks is van derde gelijke verschillen, zal men ten minsten vier Termen moeten weten, om de overige te bepalen, door de *Formule*

$$T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}D;$$

en zoo voortgaande altijd één Term meer, dan de rang der gelijke verschillen.

Als bijgevolg van eene Reeks het vereischte getal van Termen gegeven is, zoodanig dat deze Termen zich op gelijke afstanden van elkander bevinden, kan men door de voorgaande handelwijze gemak-

kelijk de waarde der *Coëfficiënten* A, B, C &c. bepalen, en daardoor T vinden: maar als deze gegebene Termen op ongelijke afstanden van elkander zijn, moet men in de *Formule* van T achtervolgelijk voor n en T hare gegebene waarden stellen, waardoor men zoo vele eenvoudige *Equatiën* zal bekomen, als 'er grootheden A, B, C &c in T voor handen zijn, en waaruit vervolgens deze grootheden gemakkelijk kunnen bepaald worden; als in dit

V O O R B E E L D.

Alleen gegeven zijnde de drie *Trigonaal*-getallen, 1, 15 en 36, zijnde de 1^{ste}, 5^{de} en 8^{ste} in orde, of de 1^{ste}, 5^{de} en 8^{ste} Termen der *Seriës* van natuurlijk elkander opvolgende *Trigonalen*; zoo heeft men, stellende succesfivelijk $T=1, 15, 36$ en $n=1, 5, 8$ uit de algemeene *Formule* $T=A+(n-1)B+\frac{(n-1)(n-2)}{2}C$

$$\begin{array}{l} 1=A \\ 15=A+4B+6C \\ 36=A+7B+21C \end{array} \left| \begin{array}{l} 14=4B+6C \\ 21=3B+15C \end{array} \right. \text{ of } \left| \begin{array}{l} 3\frac{1}{2}=B+1\frac{1}{2}C \\ 7=B+5C \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 3\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}C \end{array} \right.$$

waaruit $C=1$ en $B=2$; welke waarden voor A, B en C in de plaats gesteld, heeft men voor den algemeenen Term der *Seriës*, waartoe deze getallen 1, 15, 36 behooren,

$$T=1+2(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

of $T=2n-1+\frac{n^2-3n+2}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ even als te voren, en waardoor men nu verder alle andere Termen dezer *Seriës* kan vinden.

En op dezelfde wijze kan men handelen in andere bijzondere gevallen; doch wij zullen de zaak liever algemeen beschouwen, in het volgend

DER-

DERDE ALGEMEEN VOORSTEL.

Gegeven zijnde eenige getallen a, b, c, d &c. behoorende tot een *Seriës*, welker verschillen eindelijk gelijk worden, om den algemeenen Term hiervan te bepalen?

OPLOSSING.

Stel de afstanden, welke de Termen a, b, c, d &c. successivelijk van elkander hebben, te zijn p, q, r &c.; dan heeft men,

voor $n=1, p+1, p+q+1, p+q+r+1$ &c.

$T=a, b, c, d, \text{ &c.}$

1. Als de eerste verschillen gelijk zijn, is bijgevolg in $T=A+(n-1)B$

$$a=A$$

$$\text{en } b=A+pB: \text{ dus } B=\frac{b-a}{p}.$$

Derhalve $\mathfrak{A}=A=a$

en $\mathfrak{B}=\frac{b-a}{p}$ stellende, zoo is $T=\mathfrak{A}+(n-1)\mathfrak{B}$.

2. Als de tweede verschillen gelijk zijn, is in $T=A+(n-1)B+\frac{(n-1)(n-2)}{2}C$

$$a=A$$

$$b=A+pB+\frac{p(p-1)}{2}C$$

$$c=A+(p+q)B+\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}C.$$

$$\text{Dus } b-a=pB+\frac{p(p-1)}{2}C \text{ en } \frac{b-a}{p}=B+\frac{p-1}{2}C$$

$$c-b=qB+\frac{q(2p+q-1)}{2}C \text{ en } \frac{c-b}{q}=B+\frac{2p+q-1}{2}C$$

stellende wederom $\mathfrak{A}=a, \mathfrak{B}=\frac{b-a}{p}$ en $\mathfrak{C}=\frac{c-b}{q}$

$$\text{zoo is } \mathfrak{B} = B + \frac{p-1}{2} C$$

$$\mathfrak{B} = B + \frac{2p+q-1}{2} C$$

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{B} = \frac{p+q}{2} C \text{ of } \frac{C}{2} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}}{p+q}$$

$$\text{stellende } \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}}{p+q} = \mathfrak{C}; \text{ zoo is } T = \mathfrak{A} + (n-1)B + (n-1)(n-2)\mathfrak{C}$$

$$\text{Maar } B = \mathfrak{B} - (p-1)\mathfrak{C};$$

$$\text{dus } (n-1)B = (n-1)\mathfrak{B} + (n-1)(1-p)\mathfrak{C};$$

$$\text{daarom } T = \mathfrak{A} + (n-1)\mathfrak{B} + (n-1)(n-1-p)\mathfrak{C}.$$

3. De derde verschillen gelijk zijnde, is in

$$T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2} C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} D$$

$$a = A$$

$$b = A + pB + \frac{p(p-1)}{2} C + \frac{p(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3} D$$

$$c = A + (p+q)B + \frac{(p+q)(p+q-1)}{2} C + \frac{(p+q)(p+q-1)(p+q-2)}{2 \cdot 3} D$$

$$d = A + (p+q+r)B + \frac{(p+q+r)(p+q+r-1)}{2} C + \frac{(p+q+r)(p+q+r-1)(p+q+r-2)}{2 \cdot 3} D$$

of stellende, om te verkorten, $\alpha = p-1$ en $\beta = p-2$; zoo is

$$a = A$$

$$b = A + pB + \frac{p\alpha}{2} C + \frac{p\alpha\beta}{2 \cdot 3} D$$

$$c = A + (p+q)B + \frac{(p+q)(\alpha+q)}{2} C + \frac{(p+q)(\alpha+q)(\beta+q)}{2 \cdot 3} D$$

$$d = A + (p+q+r)B + \frac{(p+q+r)(\alpha+q+r)}{2} C + \frac{(p+q+r)(\alpha+q+r)(\beta+q+r)}{2 \cdot 3} D$$

Der-

Derhalve is door aftrekking

$$b-a = pB + \frac{p\alpha}{2}C + \frac{p\alpha\beta}{2.3}D$$

$$c-b = qB + q \times \frac{q+p+\alpha}{2}C + q \times \frac{q^2+q(p+\alpha+\beta)+p\alpha+p\beta+\alpha\beta}{2.3}D$$

$$d-c = rB + r \times \frac{r+2q+p+\alpha}{2}C + r \times \frac{r^2+3qr+3q^2+(r+2q)(p+\alpha+\beta)+p\alpha+p\beta+\alpha\beta}{2.3}D.$$

En vervolgens door deeling

$$\frac{b-a}{p} = B + \frac{\alpha}{2}C + \frac{\alpha\beta}{2.3}D$$

$$\frac{c-b}{q} = B + \frac{q+p+\alpha}{2}C + \frac{q^2+q(p+\alpha+\beta)+p\alpha+p\beta+\alpha\beta}{2.3}D$$

$$\frac{d-c}{r} = B + \frac{r+2q+p+\alpha}{2}C + \frac{r^2+3qr+3q^2+(r+2q)(p+\alpha+\beta)+p\alpha+p\beta+\alpha\beta}{2.3}D.$$

Hieruit heeft men wederom

$$\frac{c-b}{q} - \frac{b-a}{p} = \frac{p+q}{2}C + \frac{q^2+q(p+\alpha+\beta)+p\alpha+p\beta}{2.3}D$$

$$\frac{d-c}{r} - \frac{c-b}{q} = \frac{r+q}{2}C + \frac{r^2+3qr+2q^2+(r+q)(p+\alpha+\beta)}{2.3}D.$$

En vervolgens

$$\mathcal{C} = \frac{\frac{c-b}{q} - \frac{b-a}{p}}{p+q} = \frac{1}{2}C + \frac{q+\alpha+\beta}{2.3}D$$

$$\mathcal{C} = \frac{\frac{d-c}{r} - \frac{c-b}{q}}{q+r} = \frac{1}{2}C + \frac{r+2q+p+\alpha+\beta}{2.3}D.$$

$$\text{Derhalve } \mathcal{C} - \mathcal{C} = \frac{r+q+p}{2.3}D$$

$$\text{en } \frac{D}{2.3} = \frac{\mathcal{C} - \mathcal{C}}{p+q+r} = 0.$$

Bijgevolg hebben wij $\frac{D}{2.3} = \mathfrak{D}$

$$\frac{C}{2} = \mathfrak{C} - \frac{q + \alpha + \beta}{2.3} D = \mathfrak{C} - (q + \alpha + \beta) \mathfrak{D}$$

$$B = \mathfrak{B} - \frac{\alpha}{2} C - \frac{\alpha\beta}{2.3} D = \mathfrak{B} - \alpha \mathfrak{C} + \alpha(q + \alpha) \mathfrak{D}.$$

Daarom $A = \mathfrak{A}$

$$(n-1) B = (n-1) \mathfrak{B} - (n-1) \alpha \mathfrak{C} + (n-1) \alpha(q + \alpha) \mathfrak{D}$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} C = (n-1)(n-2) \mathfrak{C} - (n-1)(n-2)(q + \alpha + \beta) \mathfrak{D}$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3} D = (n-1)(n-2)(n-3) \mathfrak{D}.$$

$$\text{en } T = \mathfrak{A} + (n-1) \mathfrak{B} + (n-1)(n-2) \alpha \mathfrak{C} + (n-1)(n-2) \alpha(n-2-\alpha-q) \mathfrak{D}$$

$$\text{of } T = \mathfrak{A} + (n-1) \mathfrak{B} + (n-1)(n-1-p) \mathfrak{C} + (n-1)(n-1-p)(n-1-p-q) \mathfrak{D}.$$

Hieruit is de algemeene Regel blijkbaar.

$$\begin{array}{l} \text{Neem } \mathfrak{A} = a, \mathfrak{B} = \frac{b-a}{p} \left| \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}}{p+q} = \mathfrak{C} \\ \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}}{q+r} = \mathfrak{C} \\ \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}}{r+s} = \mathfrak{C} \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}}{p+q+r} = \mathfrak{D} \\ \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}}{q+r+s} = \mathfrak{D} \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{D} - \mathfrak{D}}{p+q+r+s} = \mathfrak{E} \\ \text{\&c. \&c.} \end{array} \right. \\ \mathfrak{B} = \frac{c-b}{q} \\ \mathfrak{B} = \frac{d-c}{r} \\ \mathfrak{B} = \frac{e-d}{s} \end{array}$$

Zoo is algemeen $T = \mathfrak{A} + (n-1) \mathfrak{B} + (n-1)(n-1-p) \mathfrak{C} + (n-1)(n-1-p)(n-1-p-q) \mathfrak{D} + (n-1)(n-1-p)(n-1-p-q)(n-1-p-q-r) \mathfrak{E} \&c.$

Dat te vinden was.

I. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde 1 15 36
 zijnde de 1^{ste}, 5^{de} en 8^{ste} Termen van de *Seriës* der *Trigonalen*; zoo
 is $p=4$ en $q=3$. Voorts $a=1$, $b=15$ en $c=36$.

$$\text{Bijgevolg } T = \mathfrak{A} + (n-1)\mathfrak{B} + (n-1)(n-5)\mathfrak{C}.$$

$$\text{Maar } \mathfrak{A}=1, \mathfrak{B}=\frac{14}{4}=3\frac{1}{2} \quad \left| \quad \mathfrak{C}=\frac{3\frac{1}{2}}{7}=\frac{1}{2} \right.$$

$$\mathfrak{B}=\frac{21}{3}=7$$

$$\text{Derhalve } T = 1 + 3\frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-5) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Men kan de bewerking gemakkelijkst in dezer voege stellen,

$$\begin{array}{r} 1 \qquad \qquad \qquad 5 \qquad \qquad \qquad 8 \\ 1 \dots \dots \dots 15 \dots \dots \dots 36 \end{array}$$

$$p=4) \frac{14}{3\frac{1}{2}} \dots \dots \dots q=3) \frac{21}{7}$$

$$p+q=7) \frac{3\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Dus } T = 1 + 3\frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-5) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

2. V O O R B E E L D.

Gegeven 1 4 10 Termen.
 1 16 100

$$3) \frac{15}{5} \dots \dots \dots 6) \frac{84}{14}$$

$$9) \frac{9}{1}$$

$$\text{Derhalve } T = 1 + 5(n-1) + (n-1)(n-4) = 5n + 4 + n^2 - 5n - 4 = n^2.$$

3. VOORBEELD.

Gegeven

1	3,4	7 Termen.
1	10,20	84
2) $\frac{9}{4\frac{1}{2}}$	1) $\frac{10}{10}$	3) $\frac{64}{21\frac{1}{2}}$
3) $\frac{5\frac{1}{2}}{1\frac{5}{6}}$	4) $\frac{11\frac{1}{3}}{2\frac{5}{6}}$	
6) $\frac{1}{\frac{1}{6}}$		

Dus $T = 1 + 4\frac{1}{2}(n-1) + 1\frac{5}{6}(n-1)(n-3) + \frac{1}{6}(n-1)(n-3)(n-4)$
 of $T = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$

4. VOORBEELD.

Gegeven

1	2	4	6, 7 Termen
5, 15	70	210, 330	
1) $\frac{10}{10}$	2) $\frac{55}{27\frac{1}{2}}$	2) $\frac{140}{70}$	1) $\frac{120}{120}$
3) $\frac{17\frac{1}{2}}{5\frac{5}{8}}$	4) $\frac{42\frac{1}{2}}{10\frac{5}{8}}$	3) $\frac{50}{16\frac{2}{3}}$	
5) $\frac{4\frac{19}{24}}{2\frac{2}{3}}$	5) $\frac{6\frac{1}{24}}{1\frac{5}{24}}$		
6) $\frac{6\frac{1}{24}}{1\frac{1}{24}}$			

Bijgevolg is
 $T = 5 + 10(n-1) + 5\frac{5}{8}(n-1)(n-2) + 2\frac{2}{3}(n-1)(n-2)(n-4) + \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)$
 of $T = \frac{n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24}{24} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

Laat

Laat $n = 0$ zijn, dan is $T = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$

$n = 3$ — — — $T = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 7 = 35$

$n = 5$ — — — $T = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 2 \cdot 9 = 126$

Waardoor nu de *Seriës* aangevuld kan worden, zijnde bijgevolg
1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330 &c.

N. B. Als men 5 voor den tweeden Term neemt, zoo als hij eigenlijk is, zou men hebben ($n-1$ in plaats van n stellende)

$$T = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

zijnde de *Formule* voor de *Pyramidaal*-getallen, even als te voren op *bladz.* 19.

A A N M E R K I N G.

Uit deze Voorbeelden blijkt dan klaar genoeg, hoe men eene Reeks kan aanvullen of *interpoleren*, als derzelver eerste, tweede, derde enz. verschillen aan elkander gelijk zijn, mits men van dezelfde één term meer, dan de rang is der gelijke verschillen, bekend hebbe, op welken afstand van elkander deze bekende termen ook geplaatst mogen zijn. Maar in het werkdadige der Wiskunst komen meestal Reeksen van Getallen voor, welker verschillen niet, strikt genomen, aan elkander gelijk worden; doch die men echter als zoodanig kan beschouwen, mits men deze verschillen zoo lang neme, tot dat ze zeer klein zijn. Als men dan maar twee getallen gegeven heeft, kan men niets anders doen, dan het eerste verschil terstond als gelijk, of standvastig, te beschouwen; het gene dan op hetzelfde uitkomt, als de gewone handelwijze, om tusschen twee grootheden een gegeven aantal van *Arithmetisch* Middenevenredingen te vinden: en in dit geval heeft men alleen te nemen $T = A + (n-1)B$. Doch als 'er drie Getallen gegeven zijn, moet

men de tweede verschillen als gelijk aanmerken, en nemen

$$T = \mathcal{A} + (n-1) \mathcal{B} + (n-1)(n-1-p) \mathcal{C}.$$

Voor vier Getallen kan men de derde verschillen gelijk nemen, en stellen

$$T = \mathcal{A} + (n-1) \mathcal{B} + (n-1)(n-1-p) \mathcal{C} + (n-1)(n-1-p)(n-1-p-q) \mathcal{D}.$$

en zoo vervolgens. Waaruit volgt dat, hoe meerder Getallen a, b, c &c. gegeven zijn, met zoo veel te meer naauwkeurigheid kan men dezelve tot eene *Arithmetische Seriës* brengen, en *interpoleren*. Hiertoe behoren de volgende Voorbeelden.

I. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de *Logarithmen* van 500, 504 en 505, om te vinden die van 501, 502 en 503?

1	5	6
2.6989700,0	2.7024305,4	2.7032913,8
$p = 4) \frac{34605,4}{8651,35}$	$q = 1) \frac{8608,4}{8608,4}$	
$p + q = 5) \frac{-42,95}{-8,59}$		
Derhalve $T = 2,6989700 + (n-1) 8651,35 - (n-1)(n-5) 8,59$		
Nemende $n = 2 \dots \dots \dots 3 \dots \dots \dots 4$		
2,6989700	2,6989700	2,6989700
8651,35	17302,7	25954,05
25,77	34,36	25,77
$\text{Log. } 501 = 2,6998377$	$\text{Log. } 502 = 2,7007037$	$\text{Log. } 503 = 2,7015680$

Waaruit blijkt, dat, om de *Logarithmen* te *interpoleren* omstreeks 500, men ten minsten de tweede verschillen moet nemen.

2. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de *Logarithmen* van 100, 105, 106 en 107, om te vinden die van 101, 102, 103 en 104?

1	6	7	8
2.0000000	2.0211893	2.0253058,7	2.0293837,8
$p=5) \frac{211893}{42378,6}$	$q=1) \frac{41165,7}{41165,7}$	$r=1) \frac{40779,1}{40779,1}$	
	$- 1212,9$	$- 386,6$	
$p+q=6) \frac{-}{- 202,15}$	$q+r=2) \frac{-}{- 193,3}$		
	$+ 8,85$		
	$p+q+r=7) \frac{+}{+ 1,264}$		

Dus $T = \mathfrak{A} + (n-1)\mathfrak{B} + (n-1)(n-6)\mathfrak{C} + (n-1)(n-6)(n-7)\mathfrak{D}$.

Dat is $T = 2.0000000 + (n-1)42378,6 + (n-1)(n-6) \times -202,15 + (n-1)(n-6)(n-7)1,264$

Nemende $n=2$ 3

2.0000000	2.0000000
42378,6	84757,2
808,6	1212,9
25,3	30,3
<u>Log. 101 = 2.0043212</u>	<u>Log. 102 = 2.0086000</u>

Nemende $n=4$ 5

2.0000000	2.0000000
127135,8	169514,4
1212,9	808,6
22,7	10,1
<u>Log. 103 = 2.0128371</u>	<u>Log. 104 = 2.0170333</u>

Van deze verschillen sommige nog 1 in de laatste letter van de ware *Logarithmen*; waaruit men ziet, dat, om de *Logarithmen* te *interpoleren* van getallen omstreeks 100 en daar beneden, ten minste de vierde verschillen moeten genomen worden, om tot 7 getalmerken in de breuk naauwkeurig te blijven.

3. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de Afstanden eener Komeet van de Zon des nachts ten 12 uren, op de volgende dagen

12 December = 301
21 — — — = 620
24 — — — = 715
en 26 — — — = 772

Om den Afstand te vinden op middernacht van den 20sten?

Dagen 12 21 24 26
Afstanden 301 620 715 772

$$\begin{array}{r} 9) \frac{319}{35\frac{1}{2}} \dots\dots 3) \frac{95}{31\frac{1}{2}} \dots\dots 2) \frac{57}{28\frac{1}{2}} \\ 12) \frac{3\frac{7}{2}}{17\frac{1}{2}} \dots\dots 5) \frac{3\frac{1}{2}}{19\frac{1}{2}} \\ 14) \frac{43}{1890} \end{array}$$

$$\text{Derhalve } T = 301 + 35\frac{4}{9}(n-1) - \frac{17}{54}(n-1)(n-10) - \frac{43}{1890}(n-1)(n-10)(n-13)$$

of voor $n = 9$

$$\text{is } T = 301 + 35\frac{4}{9} \times 8 + \frac{17}{54} \times 8 - \frac{43}{1890} \times 8 \times 4$$

$$\text{of } T = 301 + 283\frac{5}{9} + 2\frac{14}{27} - \frac{688}{945} = 586\frac{109}{315} \text{ de begeerde Afstand.}$$

4. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de 5 volgende Waarnemingen van een Komeet,

den 3 November ten 17 u. in Leo 29° 51'
5 — — — — 15 — in Virgo 3. 23
10 — — — — 16 — — — — 15. 32
18 — — — — 21 — in Libra 18. 52
20 — — — — 17 — — — — 28. 10

om deszelfs plaats te vinden, den 16^{de} Nov. ten 17 Uren?

Breng

Breng de Uren tot tiendeeligen van Dagen, en de Minuten tot tiendeeligen van Graden; dan heeft men

$$\begin{array}{rcccccc} 3,708 & \dots & 5,625 & \dots & 10,667 & \dots & 18,875 & \dots & 20,708 \\ 29,85 & \dots & 33,383 & \dots & 45,54 & \dots & 78,867 & \dots & 88,167 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} 1,917) \frac{3,533}{1,84} & \dots & 5,042) \frac{12,157}{2,41} & \dots & 8,208) \frac{33,327}{4,06} & \dots & 1,833) \frac{9,3}{5,07} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} 6,959) \frac{0,57}{0,08} & \dots & 13,25) \frac{1,65}{0,12} & \dots & 10,041) \frac{1,01}{0,1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} 15,167) \frac{0,04}{0,003} & \dots & 15,083) \frac{0,02}{0,001} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17) \frac{0,004}{0,00024} \end{array}$$

$$\text{Derhalve } T = 29^{\circ},85 + 1,84(n-1) + 0,08(n-1)(n-2,917) + 0,003(n-1)(n-2,917)(n-7,959) - 0,00024(n-1)(n-2,917)(n-7,959)(n-16,167)$$

Maar nu is $n = 14$, dus $n - 1 = 13$

$$n - 2,917 = 11,083$$

$$n - 7,959 = 6,041$$

$$n - 16,167 = -2,167$$

Bijgevolg $T = 29^{\circ},85$

$$+ 23,92$$

$$+ 11,53$$

$$+ 2,62$$

$$+ 0,45$$

of $T = 68,37 = 68^{\circ} 22'$ nagenoeg, dat is $8^{\circ} 22'$ in *Libra*.

I. G E V O L G.

Als men stelt $p=q=r$ enz. of de Getallen a, b, c, d &c. alle op gelijke afstanden van elkander, verandert de algemeene *Formule* in

$$T = \mathfrak{A} + (n-1)\mathfrak{B} + (n-1)(n-1-p)\mathfrak{C} + (n-1)(n-1-p)(n-1-2p)\mathfrak{D} + (n-1)(n-1-p)(n-1-2p)(n-1-3p)\mathfrak{E} + \&c.$$

Of, om dat men als dan $p=i$ kan stellen, in

$$T = \mathfrak{A} + (n-1)\mathfrak{B} + (n-1)(n-2)\mathfrak{C} + (n-1)(n-2)(n-3)\mathfrak{D} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mathfrak{E} + \&c.$$

zijnde dezelfde met die van het *Eerste Voorstel*.

II. G E-

II. GEVOLG.

Men kan ook al het voorgaande omkeeren: namelijk, de vereischte Termen van eene *Arithmetische Seriës* gegeven zijnde, om te vinden welk een plaats een gegeven Term daarin beslaat, of hoever dezelve van den eersten Term verwijderd is; want in de algemeene *Equatie* van

$$T = A + (n-1)B + (n-1)(n-2)\frac{1}{2}C + \&c.$$

nu alles, behalven n , bekend zijnde, zal men n kunnen bepalen, door eene *Equatie* van zoo vele afmetingen, als de rang is der gelijke verschillen, of anders, als 'er Getallen min één van de *Seriës* gegeven zijn.

I. VOORBEELD.

Om te vinden het hoemenigste der elkander in orde opvolgende *Trigonalen* het getal 5565 is?

De algemeene *Formule* hier zijnde

$$T = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\text{Zoo heeft men } n^2 + n = 2T = 11130$$

$$\text{hierbij } \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{dan is } \frac{n^2 + n + \frac{1}{4} = 11130\frac{1}{4}}$$

$$n + \frac{1}{2} = 105\frac{1}{2}$$

$$\text{dus } n = 105 \text{ of de } 105^{\text{de}} \text{ Term.}$$

2. VOORBEELD.

Men vraagt of eenige Termen, en welke dan, ook kunnen nul worden, in de *Seriës* der Getallen 4, 5, 4, 2 &c. welke behooren

$$\text{tot de } \textit{Formule} T = \frac{n(n-5)(n-7)}{6}$$

De-

Dewijl hier $T=0$ is, zoo is ook $n(n-5)(n-7)=0$
 en dus of $n=0$, of $n-5=0$, of $n-7=0$
 dat is $n=0$, of $n=5$, of $n=7$
 zoo dat de Term voor de eerste, benevens de 5^{de} en 7^{de} Termen,
 alle drie nul zijn. Zie het 5^{de} Voorbeeld bladz. 9.

3. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de Zons *Declinatie*, in 1798 den

18 Maart = 43' 52" N.

19 — = 20. 9

en 21 — = 27. 17 Z.

Vrage, wanneer zal de Zon in den *Equator* zijn, of geen *Declinatie*
 hebben?

18	19	21
43' 52"	20' 9"	— 27' 14"
— 23' 43"	— 47' 23"	
1) —————	2) —————	
— 23. 43	— 23. 41½	
gemiddeld — 23. 42 = -23,7		

Derhalve is $A = 43' 52'' = 43,867$ en $B = -23,7$

Dus $T = A + (n-1)B = 0$

$$\text{dat is } n-1 = -\frac{A}{B} = \frac{43,867}{23,7} = 1,851$$

of $n = 2,851 = 2$ dagen 20 uren 25 min.

En dus de Zon in den *Equator* den 20^{sten} Maart 's morgens ten
 8 uren 25 minuten.

III. G E V O L G.

Zoo de gegevene *Seriës* voor een *Maximum* of *Minimum* vatbaar
 is, kan men den Term n , alwaar zulks plaats heeft, vinden, door
 de *Differentiaal* van T , den algemeenen Term, gelijk aan 0 te stel-
 len, en uit deze *Equatie* de waarde van n afte leiden.

H

In-

Indien de eerste verschillen gelijk zijn, of de Seriës eene gewone *Arithmetische Progresie* is, heeft men $T = A + (n-1) B$

derhalve $Bdn = 0$

dus ook $n = 0$:

weshalve hierin geen grootste of kleinste kan vallen, gelijk van zelf bekend is.

Indien de tweede verschillen gelijk zijn, heeft men

$$T = A + (n-1) B + \frac{(n-1)(n-2)}{2} C$$

$$\text{Derhalve } Bdn + nCdn - 1\frac{1}{2}Cdn = 0$$

$$\text{en hieruit } n = \frac{3C - 2B}{2C}$$

I. V O O R B E E L D.

De kleinste van alle *Trigonalen* te vinden?

De algemeene *Formule* is $T = \frac{n^2 + n}{2}$:

$$\text{bijgevolg } 2ndn + dn = 0$$

$$\text{of } n = -\frac{1}{2} \text{ en } T = -\frac{1}{8}$$

2. V O O R B E E L D.

Om te vinden, wanneer de Zon hare grootste *Declinatie* heeft, in *December* 1798, te *Greenwich*?

20 December	23° 27' 43"	+ 15"	} - 28½" gemiddeld.
21 ———	23. 27. 58	- 13	
22 ———	23. 27. 45	- 42	
23 ———	23. 27. 3		

$$\text{Derhalve is } B = +15 \text{ en } C = -28\frac{1}{2}: \text{ dus } n = \frac{-85\frac{1}{2} - 30}{-57} = \frac{115\frac{1}{2}}{57}$$

$$\text{dat is, } n = 2\frac{1}{3} = 2 \text{ d. ou. } 40'$$

of

of de Zon heeft hare grootste Zuider *Declinatie*, den 21 *Dec.* omtrent 40' nadenmiddag, zijnde dezelve

$$T = 23^{\circ} 27' 43'' + 1\frac{1}{38} \times 15'' - 1\frac{1}{38} \times \frac{1}{38} \times 14\frac{1}{2}''$$

$$\text{of } 23^{\circ} 27' 43'' + 15'',4 - 0,4 = 23^{\circ} 27' 58''.$$

I. A A N M E R K I N G.

Hieruit blijkt, dat in eene *Seriës*, welker tweede verschillen gelijk zijn, alleen maar één *Maximum* of *Minimum* kan plaats hebben, en dat, ter wederzijde van dezen allergrootsten of allerkleinsten Term, de volgende Termen tot in het oneindige blijven aanwassen of verminderen.

Bij voorbeeld: 1^o. stellende $C = -2$ en $B = 3$, zoo is $n = \frac{3C - 2B}{2C} = 3$, en $T = A + (n-1)B + (n-1)(n-2)\frac{1}{2}C$

$$\text{of } T = A + 3n - 3 - n^2 + 3n - 2 = A - n^2 + 6n - 5$$

Nemende dan $A = 5$; zoo wordt $T = 6n - n^2 = n(6-n)$ de allergrootste, zijnde de derde Term van de *Seriës*: aldus

$$n = \dots \&c. -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \&c.$$

$$T = \dots \&c. -55, -40, -27, -16, -7, 0, 5, 8, 9, 8, 5, 0, -7, -16 \&c.$$

waarvan 9 de grootste en middelste Term is.

2^o. Stellende $C = 2$ en $B = -7$, zoo is $n = \frac{3C - 2B}{2C} = 5$ en

$$T = A + n^2 - 10n + 9.$$

Nemende dan $A = 1$, zoo wordt $T = n(n-10) + 9$ de kleinste Term van de *Seriës*, zijnde nu de vijfde: aldus

$$n = \dots \&c. -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \&c.$$

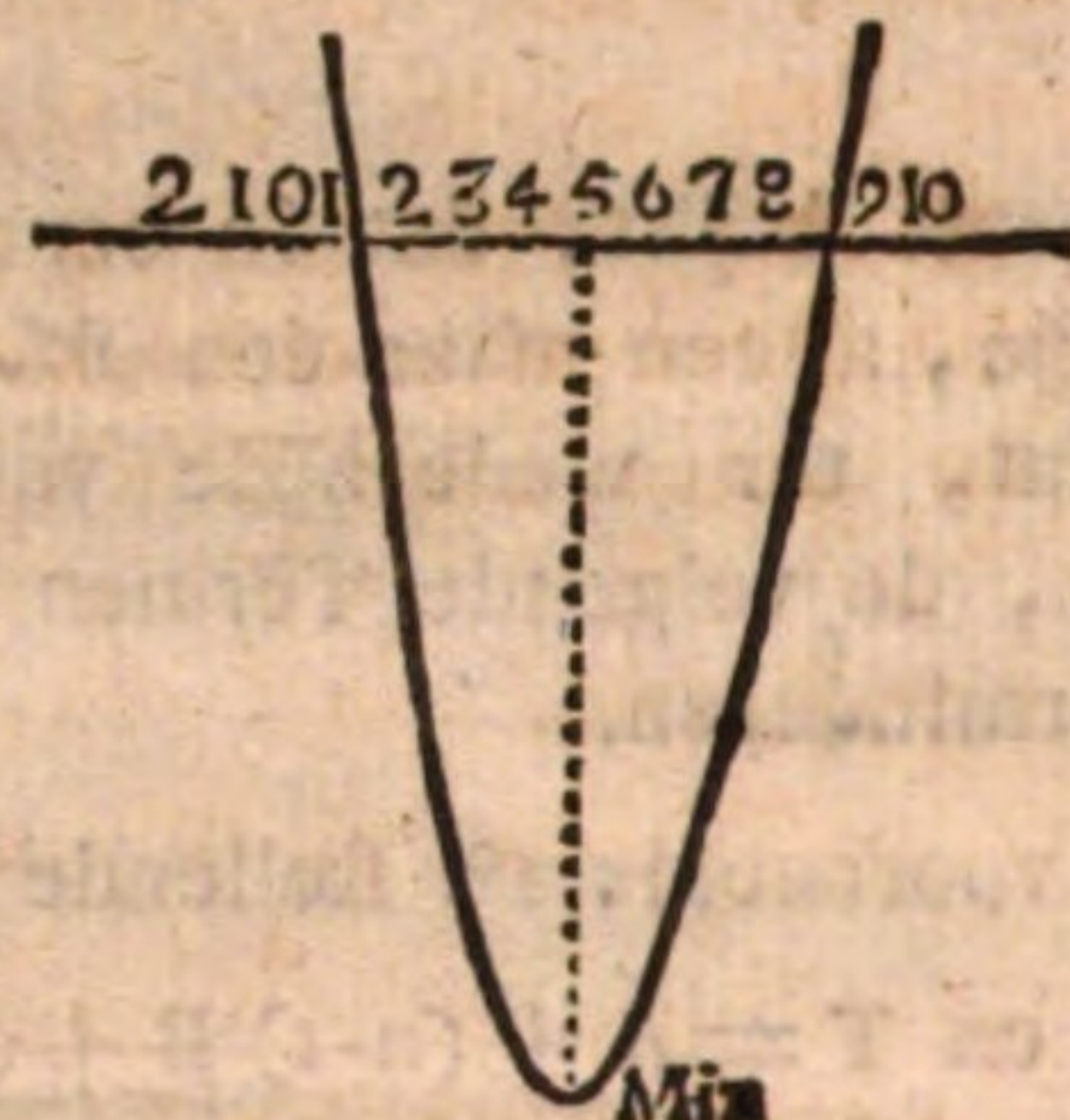
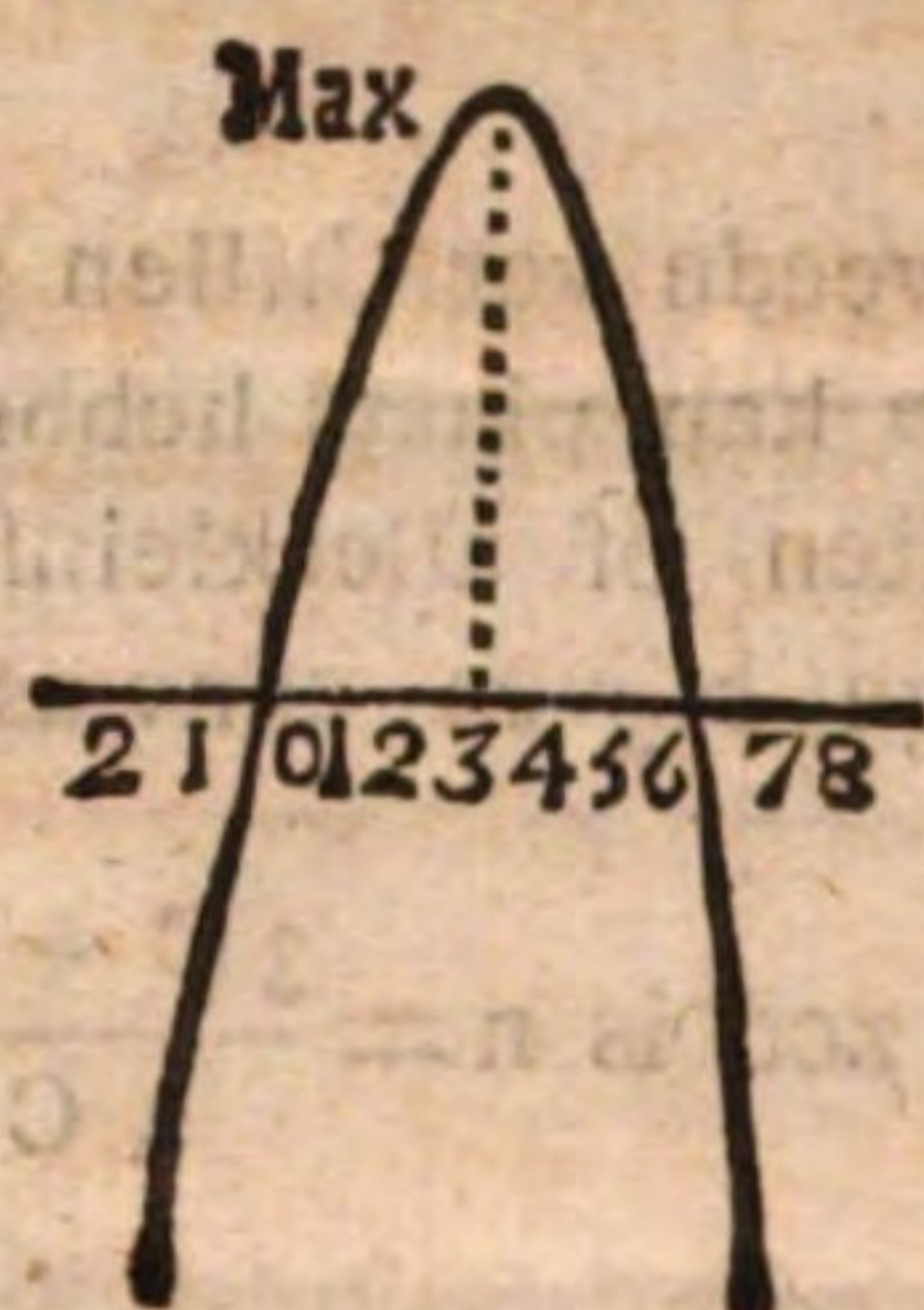
$$T = \dots \&c. 34, 21, 10, 1, -6, -11, -14, -15, -14, -11, -6, 1, 10 \&c.$$

waarvan -15 de kleinste en middelste Term is.

Ook hebben deze *Seriës* $T = 0$ op twee plaatsen, of voor twee waarden van n ; hetwelk te kennen geeft, dat de *Seriës* op twee plaatsen afbreekt, of de Termen daarvan van *Affirmatief* worden *Negatief* en omgekeerd.

Nog blijkt hieruit gemakkelijk, dat, bijaldien $n = \frac{3C - 2B}{2C}$ geen geheel getal is, het grootste of kleinste niet juist onder de Termen der gegevene *Seriës*, maar tusschen twee van dezelve zal invallen: als in het 1^{ste} en 2^{de} Voorbeeld.

De volgende kromme Lijnen toonen den loop der voorgaande getallen voor het oog aan.



II. A A N M E R K I N G.

Op dezelfde wijze kan men handelen met de *Arithmetische Seriën*, welker derde verschillen alle gelijk zijn, waarin één *Maximum* en één *Minimum* plaats hebben, en de verdere Termen naar buiten, of alle tot in het oneindige aanwasfen, of verminderen,

Laat, bij voorbeeld, gegeven zijn eene *Seriës*, waarvan de alge-

meene Term is $T = \frac{n(n-6)^2}{2} = \frac{n^3 - 12n^2 + 36n}{2}$

zoo is $3n^2 dn - 24ndn + 36dn = 0$

$3dn \mid$ of $n^2 - 8n + 12 = 0$

$4 = 4$

$\sqrt{n^2 - 8n + 16 = 4}$

$n - 4 = \pm 2$

en $n = 2$ of 6 :

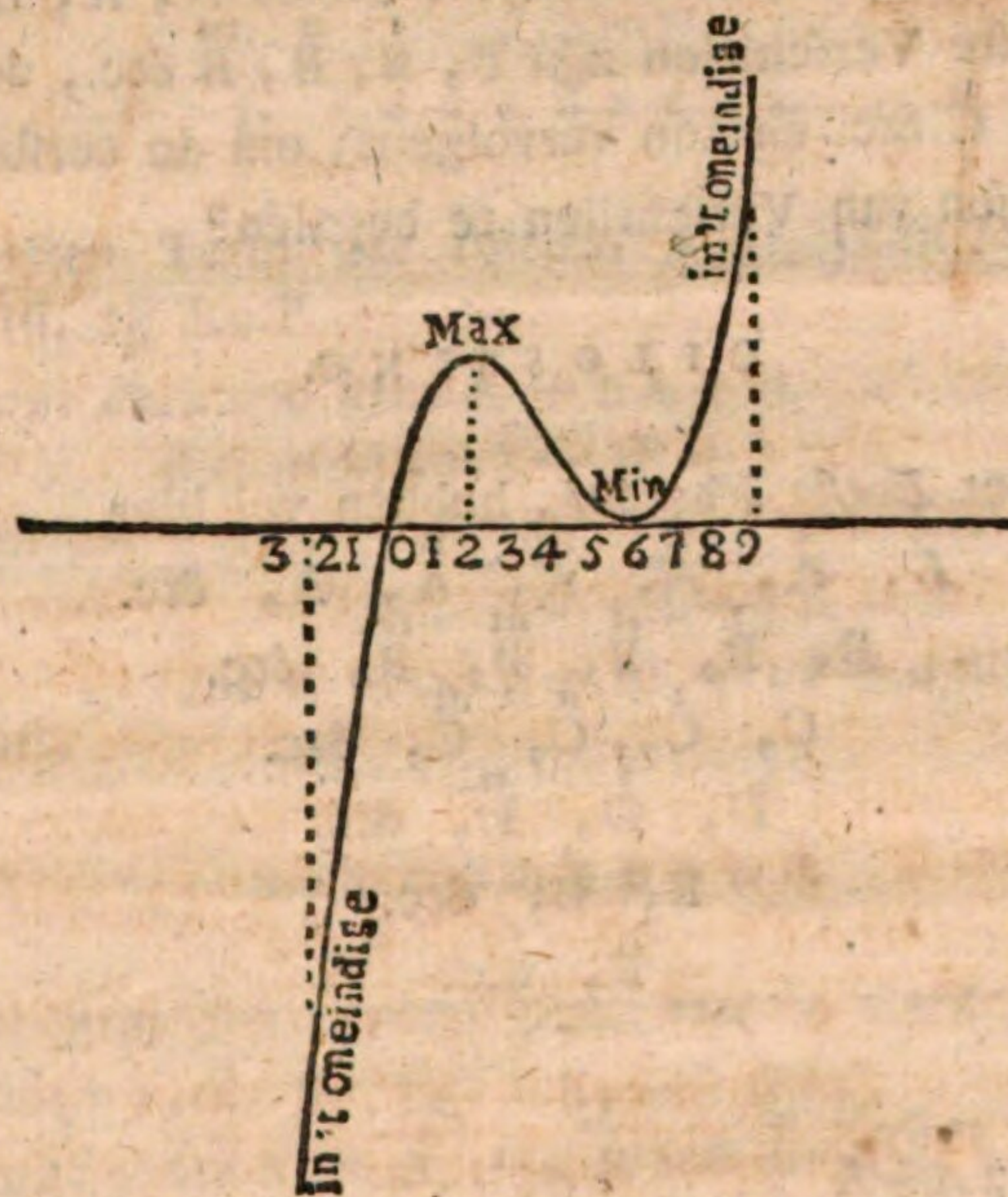
zoodat de tweede en zesde Termen de allergrootste en kleinste zijn, dat

dat is van de naburige Termen, gelijk uit de *Seriës* zelve blijken kan: aldus

$n = \dots \&c. - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \&c.$

$T = \dots \&c. - 64, - 24\frac{1}{2}, 0, 12\frac{1}{2}, 16, 13\frac{1}{2}, 8, 2\frac{1}{2}, 0, 3\frac{1}{2}, 16 \&c.$

waarvan de tweede Term 16 de grootste en de zesde Term 0 de kleinste is: want de eerste 0, overeenstemmende met $n=0$, is geen *Minimum*, omdat de voorafgaande en volgende Termen niet beide grooter dan 0 zijn, en dus de *Seriës* hier naar voren gaande geregeld afklimt, even als zij achter de laatste 0 naar achteren gaande geregeld opklimt; kunnende den loop dezer getallen zichtbaarlijk door de volgende kromme Lijn worden aangewezen.



III. A A N M E R K I N G.

Tot hiertoe hebben wij leeren vinden den algemeenen Term van *Arithmetische Seriës*, het zij de noodige Termen daarvan op gelijke

H 3

of

of ongelijke afstanden van elkander gegeven zijn. Op dezelfde wijze kan men handelen met de Reeksen harer eerste, tweede, derde enz. *Aggregaten* of Verschillen, zoo als bij het *Eerste Voorstel* reeds aangewezen is. Doch dewijl het voor de *Praktijk* somtijds noodig is, om een enkelen Term van een der Reeksen van de Verschillen, voornamelijk de eersten derzelven, afzonderlijk te weten; maken wij hiervan nog het volgend

VIERDE ALGEMEEN VOORSTEL.

Gegeven zijnde eene *Arithmetische Series* $A, \overset{I}{A}, \overset{II}{A}, \overset{III}{A}, \overset{IV}{A}, \overset{V}{A}, \&c.$ waarvan de eerste Verschillen zijn $B, \overset{I}{B}, \overset{II}{B}, \overset{III}{B}, \&c.$, de tweede Verschillen $C, \overset{I}{C}, \overset{II}{C}, \&c.$ en zoo vervolgens; om de eerste Termen van elk dezer Reeksen van Verschillen te bepalen?

OPLOSSING.

Even als in het *Eerste Voorstel*, hebben wij hier

$$A, \overset{I}{A}, \overset{II}{A}, \overset{III}{A}, \overset{IV}{A}, \overset{V}{A}, \&c.$$

$$B, \overset{I}{B}, \overset{II}{B}, \overset{III}{B}, \overset{IV}{B}, \&c.$$

$$C, \overset{I}{C}, \overset{II}{C}, \overset{III}{C}, \&c.$$

$$D, \overset{I}{D}, \overset{II}{D}, \&c.$$

$$E, \overset{I}{E}, \&c.$$

$$F, \&c.$$

Bijgevolg

$$B = \overset{I}{A} - A$$

$$C = \overset{I}{B} - B = \overset{II}{A} - 2\overset{I}{A} + A$$

$$D = \overset{I}{C} - C = \overset{II}{B} - 2\overset{I}{B} + B = \overset{III}{A} - 3\overset{II}{A} + 3\overset{I}{A} - A$$

$$E = \overset{I}{D} - D = \overset{II}{C} - 2\overset{I}{C} + C = \overset{III}{B} - 3\overset{II}{B} + 3\overset{I}{B} - B = \overset{IV}{A} - 4\overset{III}{A} + 6\overset{II}{A} - 4\overset{I}{A} + A$$

$$F = \overset{I}{E} - E = \overset{II}{D} - 2\overset{I}{D} + D = \overset{III}{C} - 3\overset{II}{C} + 3\overset{I}{C} - C = \overset{IV}{B} - 4\overset{III}{B} + 6\overset{II}{B} - 4\overset{I}{B} + B$$

$$= \overset{V}{A} - 5\overset{IV}{A} + 10\overset{III}{A} - 10\overset{II}{A} + 5\overset{I}{A} - A$$

&c. &c.

&c.

&c.

&c.

En

En dus, in 't algemeen, voor de Reeks der m^{de} Verschillen

$$M = A - mA + \frac{m(m-1)}{2} A - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} A + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} A - \&c.$$

tot m-1 termen.

Dat te vinden was.

A A N M E R K I N G.

De uitdrukkingen (m), (m-1) enz. boven de Letter A beteekenen hier geene *Exponenten* van A, maar alleen den afstand der Termen van den eersten Term.

I. V O O R B E E L D.

Om den eersten Term der tweede Verschillen te vinden van de *Seriës* 4, 9, 16, 25 &c.?

Hier is m=2: derhalve $M = \overset{II}{A} - 2\overset{I}{A} + A$
dat is $M = 16 - 18 + 4 = 2$.

Voor den eersten Term der derde Verschillen zou men hebben,

$$M = \overset{III}{A} - 3\overset{II}{A} + 3\overset{I}{A} - A$$

dat is $M = 25 - 48 + 27 - 4 = 52 - 52 = 0$

zoo als behoort.

2. V O O R B E E L D.

Men vraagt naar den eersten Term van de vierde Verschillen der *Teerlingsgetallen* 1, 8, 27, 64, 125, 216 &c.

In dezen is m=4: dus $M = \overset{IV}{A} - 4\overset{III}{A} + 6\overset{II}{A} - 4\overset{I}{A} + A$

$$\text{of } M = 125 - 4.64 + 6.27 - 4.8 + 1$$

$$\text{of } M = 125 - 256 + 162 - 32 + 1 = 288 - 288 = 0.$$

3. V O O R-

3. V O O R B E E L D.

Om den eersten Term te vinden der vijfde Verschillen van de *Hexagonaal-Pijramidaal-Getallen* van het vierde Geslacht; te weten

1, 10, 49, 168, 462, 1092, 2310, &c.

Nu is $m=5$: dus $M = \overset{v}{A} - 5 \overset{iv}{A} + 10 \overset{iii}{A} - 10 \overset{ii}{A} + 5 \overset{i}{A} - A$

Maar $\overset{v}{A} = 1092$

en $5 \overset{iv}{A} = 2310$

$10 \overset{iii}{A} = 1680$

$10 \overset{ii}{A} = 490$

$5 \overset{i}{A} = 50$

$A = 1$

$\underline{2822}$

$\underline{2801}$

$\underline{2801}$

Bijgevolg $M = 21$

Want de *Seriës* is 1, 10, 49, 168, 462, 1092, &c.

Eerste Verschillen 9, 39, 119, 294, 630, &c.

Tweede ——— 30, 80, 175, 336, &c.

Derde ——— 50, 95, 161, &c.

Vierde ——— 45, 66, &c.

Vijfde ——— 21, &c.

A A N M E R K I N G.

Uit het Voorstel is blijkbaar, dat de Regel algemeen is, offchoon de grootheden $A, \overset{i}{A}, \overset{ii}{A}, \overset{iii}{A}$ &c. geene eigentlijke *Arithmetische Seriës* uitmaken; als in de beide volgende voorbeelden.

4. V O O R B E E L D.

De eerste der 8^{ste} Verschillen te vinden van de *Geometrische Seriës*

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 &c.

Hier is $m=8$: dus $M = \overset{viii}{A} - 8 \overset{vii}{A} + 28 \overset{vi}{A} - 56 \overset{v}{A} + 70 \overset{iv}{A} - 56 \overset{iii}{A} + 28 \overset{ii}{A} - 8 \overset{i}{A} + A$

Maar

$$\begin{array}{rcl} \text{Maar } \overset{\text{viii}}{A} = 256 & \text{en } 8 \overset{\text{vii}}{A} = 1024 \\ 28 \overset{\text{vi}}{A} = 1792 & 56 \overset{\text{v}}{A} = 1792 \\ 70 \overset{\text{iv}}{A} = 1120 & 56 \overset{\text{iii}}{A} = 448 \\ 28 \overset{\text{ii}}{A} = 112 & 8 \overset{\text{i}}{A} = 16 \\ A = A = 1 & 3280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3281 \\ 3280 \\ \hline \end{array}$$

Derhalve $M = 1$

5. V O O R B E E L D.

De eerste der 5^{de} Verschillen te vinden van de *Seriës*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \text{ \&c.}$$

Hier is $m=5$: dus $M = A - 5 \overset{\text{iv}}{A} + 10 \overset{\text{iii}}{A} - 10 \overset{\text{ii}}{A} + 5 \overset{\text{i}}{A} - A$

$$\text{of } M = \frac{1}{32} - \frac{5}{16} + \frac{10}{8} - \frac{10}{4} + \frac{5}{2} - 1$$

$$\text{of } M = \frac{121}{32} - \frac{61}{16} = \frac{1}{32}$$

L G E V O L G.

Als men neemt $\overset{\text{i}}{A}$ in plaats van A

$$\overset{\text{ii}}{A} - \overset{\text{i}}{A} - \overset{\text{i}}{A} \text{ \&c.}$$

komt $\overset{\text{i}}{B}$ in plaats van B , $\overset{\text{ii}}{B}$ in plaats van $\overset{\text{i}}{B}$ &c.

$$\overset{\text{i}}{C} - \overset{\text{ii}}{C} - \overset{\text{i}}{C} \text{ \&c.}$$

En zoo vervolgens, en dus kan men, op dezelfde wijze, ook de tweede, derde enz. Termen der eerste, tweede, derde &c. Verschillen bepalen.

V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de *Seriës*

1, 3, 9, 27, 81, 243, &c.

om den derden Term der derde Verschillen te vinden?

Hier is $m=3$: dus $M = \overset{\text{III}}{A} - 3 \overset{\text{II}}{A} + 3 \overset{\text{I}}{A} - A$

Voor A neme men nu den derden Term 9:

dan is $M = 243 - 3.81 + 3.27 - 9 = 81 - 9 = 72$

Want 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c.

2, 6, 18, 54, 162, &c.

4, 12, 36, 108, &c.

8, 24, 72, &c.

II. G E V O L G.

Als de Getallen $A, \overset{\text{I}}{A}, \overset{\text{II}}{A}, \overset{\text{III}}{A}$ &c., waarvoor wij nu, gemakshalve, zullen schrijven a, b, c, d &c. tot gelijke verschillen kunnen gebragt worden, zal men hebben

1^o. $a - b = 0$, als de getallen zelve gelijk zijn.

2^o. $a - 2b + c = 0$, als de 1^{ste} verschillen gelijk zijn.

3^o. $a - 3b + 3c - d = 0$, als de 2^{de} verschillen gelijk zijn.

4^o. $a - 4b + 6c - 4d + e = 0$, als de 3^{de} verschillen gelijk zijn.
&c. &c.

$$m^{\text{o}}.a - mb + \frac{m(m-1)}{2}c - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}d + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}e \text{ \&c.} = 0,$$

als de $(m-1)^{\text{de}}$ verschillen gelijk zijn.

Bijgevolg als 'er van $m+1$ getallen, of Termen van eene *Arithmetische Seriës*, welker $(m-1)^{\text{de}}$ verschillen alle aan elkander gelijk zijn, m Termen gegeven zijn, zal men den overigen Term door eene eenvoudige *Equatie* kunnen vinden.

V O O R B E E L D.

Van een *Seriës*, welker vierde verschillen standvastig zijn, vijf Ter-

Termen naar welgevalle gegeven zijnde, zal men den zesden kunnen vinden: want alsdan is $a - 5b + 10c - 10d + 5e - f = 0$

Aldus, gegeven zijnde 8, 16, ... 57, 99, 163

a, b, c, d, e, f.

Zoo is $10c = f - 5e + 10d + 5b - a$

en $c = \frac{f - 5e + 10d + 5b - a}{10}$

dat is $c = \frac{163 - 495 + 570 + 80 - 8}{10} = \frac{310}{10} = 31.$

III. GEVOLG.

Als de Getallen a, b, c, d &c. wel niet volstrektelijk tot gelijke verschillen kunnen gebragt worden, maar echter nagenoeg aan elkan- der gelijk zijn, zoodat hunne eerste verschillen maar zeer klein zijn, zal men hunne tweede, of derde, of vierde enz. verschillen kunnen gelijk stellen, en dus ook, als 'er van $m + 1$ dezer Getallen een aan- tal van m gegeven zijn, het overige nagenoeg kunnen bepalen, en wel des te nader, naarmate hetzelfde meer in de midden komt der gegevene getallen, en naarmate 'er meer van dezelve gegeven zijn. Dit kan somtijds van nut zijn, als blijkt uit de volgende voorbeelden.

I. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de *Logarithmen* der getallen 101, 102, 104 en 105; om den *Logarithmus* van 103 te vinden?

Hier is $m = 4$; omdat 'er 4 getallen gegeven zijn:

daarom $a - 4b + 6c - 4d + e = 0$

en $6c = 4(b + d) - (a + e)$

Nu is $b = \text{Log. } 102 = 2,0086002$

$d = \text{Log. } 104 = 2,0170333$

$a = \text{Log. } 101 = 2,0043214$

$e = \text{Log. } 105 = 2,0211893$

$4,0256335$

$16,1025340$

$4,0255107$

$12,0770233$

6)

$c = 2,0128372 = \text{Log. van } 103.$

I 2

2. VOOR-

2. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de Teerlings-wortels uit 45, 46, 47, 48 en 49, om den Teerlings-wortel uit 50 te vinden?

Hier is $m=5$: daarom $a-5b+10c-10d+5e-f=0$
en $f=a+5(e-b)-10(d-c)$

Nu is $a = \sqrt[3]{45} = 3,556893$	$d = 3,634241$	$e = 3,659306$
$b = \sqrt[3]{46} = 3,583048$	$c = 3,608826$	$b = 3,583048$
$c = \sqrt[3]{47} = 3,608826$	$\begin{array}{r} 0,025415 \\ \hline 0,254150 \end{array} (10$	$\begin{array}{r} 0,076258 \\ \hline 0,381290 \end{array} (5$
$d = \sqrt[3]{48} = 3,634241$		
$e = \sqrt[3]{49} = 3,659306$		

$$\text{Komt } f = \sqrt[3]{50} = 3,684033$$

3. V O O R B E E L D.

Gegeven zijnde de Tiende Magtswortel uit 100 = 1,584893
uit 101 = 1,586472
uit 102 = 1,588035

om die uit 103 te vinden?

Hier is $m=3$: daarom $a-3b+3c-d=0$ en $d=3(c-b)+a$

$$c = 1,588035$$

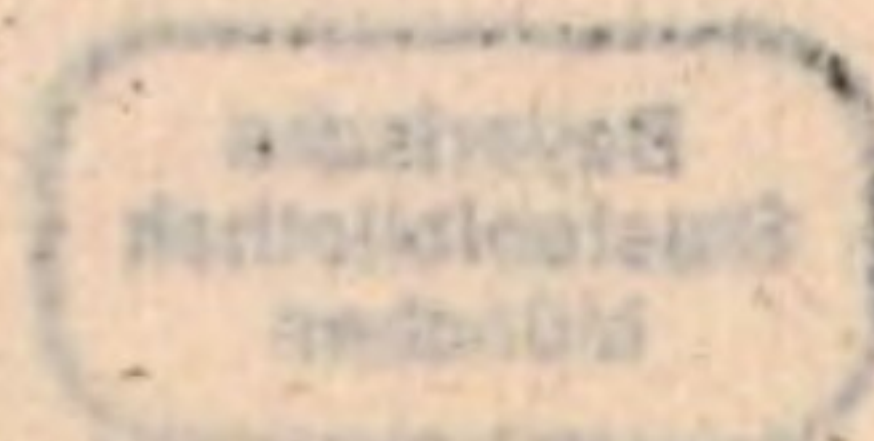
$$b = 1,586472$$

$$\begin{array}{r} 1563 \\ \hline 4689 \end{array} (3$$

$$a = 1,584893$$

Komt $d = 1,589582 = \sqrt[10]{103}$, dat tot aan de laatste letter naauwkeurig is.

E I N D E.



Florijn, Jacob

Verhandeling over het sommeren en interpoleren van arithmetische seriën,
Door Jacob Florijn uitgegeven door het K. Nederl. Instituut van
Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten

Amsterdam 1816

4 Math.p. 125 k

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053462-1